Die Alterssicherung auf der Basis einer sozialen Rentenversicherung

Eine modellmäßige Analyse der Ziele und Möglichkeiten

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
bei der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen
Fakultät der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Dipl.-Kfm. Fritz Isenbart
aus Berlin

D 188
1968

DIE ALTERSSICHERUNG AUF DER BASIS EINER SOZIALEN RENTENVERSICHERUNG

Eine modellmäßige Analyse der Ziele und Möglichkeiten

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
bei der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen
Fakultät der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Dipl.-Kfm. Fritz Isenbart
aus Berlin

Dekan: Professor Dr. Horst Sanmann

Referent: Professor Dr. Hans Münzner
Korreferent: Professor Dr. Günther Wünsche

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juni 1968

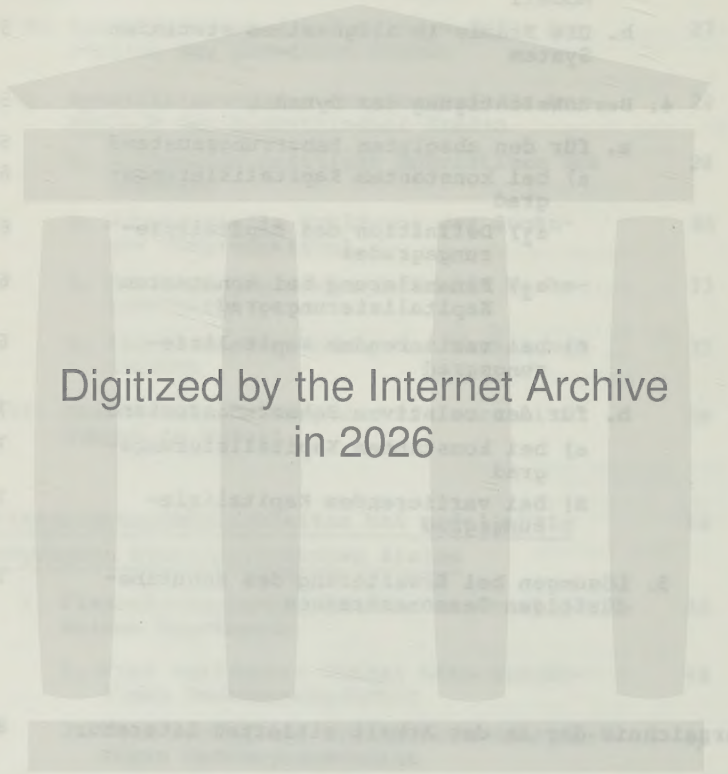
UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. Anliegen und Ausgangsmodell der Untersuchung	7
I. Anliegen der Untersuchung	7
II. Die Finanzierungsgleichung als Ausgangspunkt modellmäßiger Betrachtungen	8
1. Allgemeinste Form der Finanzierungsgleichung	8
2. Unterteilung der Totalperiode	9
3. Folgen der Einnahmen und Ausgaben	10
4. Erläuterung der Finanzierungsgleichung am Beispiel einer herkömmlichen Versorgungskasse	13
B. Die Reform der sozialen Altersrentenversicherung in der BRD und ihre Ziele	17
I. Die Reform	17
1. Die ursprüngliche deutsche Sozialversicherung	17
2. Notwendigkeit und Ansatzpunkt einer Sozialreform	18
3. Die grundlegende Zielvorstellung bezüglich der Reform	19
II. Die sozialpolitischen Zielkomponenten im einzelnen	21
1. Rentenniveau	21
2. Rentenstruktur	22
3. Personenkreis	25
4. Altersgrenze	26

	Seite
C. Spezifizierung des Ausgangsmodells und formale Fassung der Zielvorstellungen	27
I. Spezifizierung des Ausgangsmodells bezüglich der monetären Größen	27
II. Spezifizierung des Ausgangsmodells bezüglich der biometrischen Größen	28
1. Allgemeine zeitliche Entwicklung des Zuganges	28
2. Substantielle Erklärung des Zuganges (Reproduktion)	30
3. Bestimmungsgleichung für den Wachstumsfaktor	33
4. Iterative Berechnung des Wachstumsfaktors	35
III. Die formale Fassung der Zielvorstellungen im Modell	38
D. Finanzierungsmöglichkeiten bei modellmäßig gegebenen sozialpolitischen Zielen	44
I. Finanzierungsmöglichkeiten unter allgemeinen Hypothesen	44
1. Frei verfügbare Größen beim einjährigen Deckungsabschnitt	44
2. Frei verfügbare Größen beim mehrjährigen Deckungsabschnitt	45
3. Ausgaben und Einnahmen der Folgezeit	46
II. Spezielle Finanzierungsansätze bei idealen Gesamtheiten	51
1. Ideale Gesamtheit (Zeitpunktgesamtheit idealer Struktur)	51
2. Entwicklung der Finanzierungsgleichung	52

	Seite
3. Die Modellkasse des Abschnittes A II.4 als Spezialfall (absoluter Beharrungszustand)	55
a. Zusammenhang mit dem allgemeinen Modell	55
b. Die Prämie im allgemeinen statischen System	57
4. Berücksichtigung der Dynamik	59
a. für den absoluten Beharrungszustand	59
α) bei konstantem Kapitalisierungsgrad	60
α_1) Definition des Kapitalisierungsgrades	60
α_2) Finanzierung bei konstantem Kapitalisierungsgrad	62
ß) bei variierendem Kapitalisierungsgrad	67
b. für den relativen Beharrungszustand	70
α) bei konstantem Kapitalisierungsgrad	70
ß) bei variierendem Kapitalisierungsgrad	75
5. Lösungen bei Erweiterung des schutzbedürftigen Personenkreises	77
Verzeichnis der in der Arbeit zitierten Literatur	85
Verzeichnis der in der Arbeit benutzten Symbole und Abkürzungen	89



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552710_0051

A. Anliegen und Ausgangsmodell der Untersuchung

I. Anliegen der Untersuchung

In der Diskussion um die Reform der Sozialversicherung in der Deutschen Bundesrepublik sind eine große Zahl von sozialpolitischen Forderungen aufgestellt worden, von denen der größte Teil die Alterssicherung auf dem Rentenwege betrifft. Das Anliegen der folgenden Untersuchung besteht nun darin, diese Forderungen versicherungsmathematisch zu fassen, um die aus den formalen Verknüpfungen deutlich werdenden sachlichen Zusammenhänge diskutieren zu können.

Eine solche Darstellung kann freilich ihren Zweck nicht darin sehen, das gesamte geltende Recht in allen Einzelheiten widerspiegeln zu wollen. Dieser Versuch würde allein durch die Vielzahl der Übergangsregelungen zumindest in einem sehr unhandlichen Formelapparat enden. Vielmehr sollen mit Hilfe versicherungsmathematischer Modellansätze, wie sie vor allem in der privaten Pensions- und Altersrentenversicherung Anwendung finden, die Zielvorstellungen hinsichtlich eines sozialen Altersrentensystems formuliert und - unter Beachtung des gleichzeitig vorgeschlagenen Lösungsweges - die Abhängigkeiten zwischen den in Frage stehenden Größen erfaßt werden.

Dabei ist eine Beschränkung auf die hauptsächlichen sozialen, wirtschaftlichen und biometrischen Einflußgrößen (Versichertenbestände) erforderlich, um überschaubare einfache Resultate zu erhalten. Insbesondere wird von Interesse sein, welche Bedingungen diese Einflußgrößen zu erfüllen haben, damit wünschenswerte Ergebnisse zustande kommen.

Das sozialpolitische Reformwerk erlangte 1957 Gesetzeskraft, aber bei weitem nicht alle Forderungen fanden bei der Kodifizierung Berücksichtigung. So sind politische Parteien, gesellschaftliche Verbände, sonstige Interessengruppen sowie auch Einzelpersonen nicht müde geworden, auf Mißstände und Unzulänglichkeiten hinzuweisen und weitere Zielvorstellungen, hauptsächlich im Zusammenhange mit der Alters-

rente[1], ins Gespräch zu bringen.

Ehe nun die bereits erwähnten Zielvorstellungen im einzelnen untersucht werden, sei grundsätzlich noch darauf hingewiesen, daß Gegenstand der Betrachtungen nicht die Bewertung der zu diskutierenden Ziele ist[2], sondern die Maßnahmen, die zu ihrer Verwirklichung geeignet sind.

A II. Die Finanzierungsgleichung als Ausgangspunkt modellmäßiger Betrachtungen

1. Allgemeinste Form der Finanzierungsgleichung

Jede Erwägung über Versorgungsrentensysteme hat von der stets geltenden, als Finanzierungsgleichung bekannten Gleichgewichtsbedingung

$$(1) \qquad \sum_{t=t_o}^{\infty} E_t \cdot v^{t-t_o} = \sum_{t=t_o}^{\infty} A_t \cdot v^{t-t_o}$$

auszugehen.[3] Es bezeichnen hierbei t die ganzzahlige Zeitvariable und t_o den betrachteten Anfangszeitpunkt.

In dieser einfachsten Form enthält die Beziehung (1) nur die Forderung, daß die auf den Ausgangspunkt der Betrachtungen diskontierten Leistungen A_t (Rentenzahlungen) gleich den auf den gleichen Zeitpunkt diskontierten Gegenleistungen (z.B. Beitragszahlungen) E_t sein müssen.

Dieses allgemeine Prinzip ist in der Versicherungsmathematik auch als Äquivalenzprinzip bekannt, wobei die E_t, A_t sowohl als determinierte Werte (deterministisches Äquivalenzprinzip) wie auch als Erwartungswerte stochastischer Größe (stochastisches Äquivalenzprinzip) aufgefaßt werden können.

---

1) S. hierzu Dt.R.V. 1966, [35], insbes. S. 224 - 238. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

2) S. hierzu Schreiber [22], S. 3o5

3) S. hierzu Wünsche [36], S. 5o6

Beim Aufbau spezieller Finanzierungssysteme wird man bei der Frage nach der geeignetsten Verteilung (nicht im stochastischen Sinne) der Gesamteinnahmen bzw. Gesamtausgaben auf die einzelnen Zeitpunkte t von den erreichbaren Zielvorstellungen ausgehen. Dabei hat man jedoch eine ganze Reihe von Nebenbedingungen z.B. biologischer, wirtschaftlicher und sozialer Art zu beachten.

A II.2 Unterteilung der Totalperiode

Die Finanzierungsgleichung ist nun aber in der oben zitierten Form nicht immer sinnvoll, da sie für gewisse Folgen A_t, E_t den Fall der Gleichheit unendlicher Summen enthält. Die Beziehung (1) wird aber sofort anschaulicher, wenn die unterstellte Totalperiode des Wirkens der Versorgungseinrichtung (Sozialversicherungskasse oder ähnliches) für Zeitintervalle $[0, \infty]$ in Teilperioden unterteilt wird. Mit diesem Falle haben wir es in der Realität ausschließlich zu tun.

Nimmt man z.B. eine einmalige Unterteilung der Totalperiode vor, so erhält man

$$(2) \qquad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} E_t \cdot v^{t-t_o} + \sum_{t=t_1}^{\infty} E_t \cdot v^{t-t_o} =$$

$$= \sum_{t=t_o}^{t_1-1} A_t \cdot v^{t-t_o} + \sum_{t=t_1}^{\infty} A_t \cdot v^{t-t_o} .$$

Aus dieser Beziehung werden dann die Summen der Ausgaben und Einnahmen für die Teilperiode $[0,t_1)$ bestimmt, wobei für die einzelnen A_t und E_t noch eine große Anzahl von Nebenbedingungen besteht.

In der deutschen sozialen Rentenversicherung ist die jeweilige Teilperiode nach geltendem Recht, ausgehend vom 1.1.1957, auf zehn Jahre festgesetzt. Dabei ist das Verhältnis zwischen Einnahmen und Ausgaben so zu bestimmen, daß in jeder als Deckungsabschnitt bezeichneten Teilperiode

der Wert aller eingehenden Beiträge (ArV sowie AnV) und sonstigen Einnahmen samt dem Vermögen den Betrag decken, der erforderlich ist, damit alle im gleichen Deckungsabschnitt zu leistenden Aufwendungen bestritten werden können. Außerdem muß am Ende des Deckungsabschnittes eine Rücklage verbleiben, die den Aufwendungen zu Lasten der Versicherungsträger im letzten Jahre des Deckungsabschnittes gleichkommt.[4] Zwischen den auf das Intervall $[t_o, t_1)$ bezogenen Teilsummen der Beziehung (2) herrscht in diesem Falle Gleichheit, wenn man verabredet, daß die erste Einnahme E_{t_o} des Deckungsabschnittes die vorhandene Reserve $F(t_o)$ enthält, und die letzte Ausgabe des Deckungsabschnittes E_{t_1-1} die diskontierte Reserve enthalten soll, die zu Beginn des neuen Deckungsabschnittes dem Finanzierungssystem zur Verfügung steht. Dann gilt wieder die Finanzierungsgleichheit in der speziellen Form

$$(3) \qquad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} E_t \cdot v^{t-t_o} = \sum_{t=t_o}^{t_1-1} A_t \cdot v^{t-t_o}.$$

Die Änderung des geltenden Rechts bezüglich der Deckungsabschnitte ist allerdings abzusehen. Während für die öffentlichen Haushalte - nicht zuletzt unter dem aktuellen Druck der derzeitigen Phase im Konjunkturzyklus - eine mittelfristige Finanzierungsplanung angestrebt wird, soll der zehnjährige Deckungsabschnitt auf einen vierjährigen Zeitraum gekürzt werden. Auf die Zielvorstellungen, die hier im einzelnen zugrunde liegen können, wird in der Untersuchung noch näher eingegangen.

A II.3 Folgen der Einnahmen und Ausgaben

Da nun im Zusammenhang mit der vorliegenden Abhandlung ausschließlich Probleme betrachtet werden sollen, die mit der Altersrentengewährung zusammenhängen, setzt sich die Folge der A_t naturgemäß aus der Zahl der Altersrentner und der Höhe der gewährten Renten zusammen. Betrachtet man modell-

---

4) S. § 1383 Abs. 1 RVO

mäßig die soziale Rentenversicherung (ArV, AnV) als Einheit, so können die vorgeschriebenen Ausgleichszahlungen zwischen den einzelnen Rentenversicherungsträgern[5] außer acht gelassen werden.

Die Folge der E_t enthält dann die Beiträge der Aktivversicherten, ihrer Arbeitgeber, Zuschüsse des Bundes und Erträgnisse aus zinsbringend angelegten Reserven. Wenn wir nun weiter in den Modellbetrachtungen davon ausgehen, daß die Leistungen aus der Altersrentensicherung ausschließlich durch Beiträge (der Versicherten und ihrer Arbeitgeber) finanziert werden, werden wir der Vorstellung des Gesetzgebers gerecht. Der dritte wesentliche Finanzierungsbeitrag zur Sozialversicherung sind die Bundeszuschüsse. Sie sind jedoch lediglich zur Finanzierung von Leistungen gedacht, die nicht Altersrenten sind.[6] In der Praxis der Rentenversicherungen wird dieser Vorstellung zwar nicht entsprochen, aber es steht keine abweichende Zielvorstellung hinter dieser Übung, sondern lediglich das verwaltungstechnische Unvermögen der Rentenversicherungen, die Leistungsaufwendungen (Rentenzahlungen) nach Finanzierungsquellen entsprechend den Vorstellungen des Gesetzgebers aufzuschlüsseln.[7] Gehen wir also demnach davon aus, daß während des Deckungsabschnittes die Folge der Einnahmen E_t nur Beitragseinnahmen und Überträge von Reserven enthalten soll, während die Folge der Ausgaben A_t nur aus Altersrenten und Überträgen von Reserven besteht, so kann die Beziehung (3) wie folgt modifiziert werden:

---

5) § 1390 RVO

6) § 1389 RVO

7) Diese Praxis ist neuerdings in der öffentlichen Sitzung des sozialpolitischen Ausschusses des Bundestages (März 1967 in Berlin) gerügt worden.

S. Richter [19], F XLV 2, S. 1951 ff.

$$(4)\qquad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t) + \pi(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t)\, G(x,t)\} =$$

$$= \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t+1)\cdot v + \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t)\, R(x,t)\}\,.$$

Dabei bedeuten:

$L(x,t)$ $\begin{cases} x_o \leq x < s & \text{die im Jahre } t \text{ versicherten } x\text{-jährigen Aktiven (Beitragszahler),} \\ s \leq x \leq \omega & \text{die im Jahre } t \text{ versicherten } x\text{-jährigen Rentner;} \end{cases}$

$G(x,t)$ $\begin{cases} \text{das durchschnittliche Einkommen (Lohn, Gehalt),} \\ \text{das } x\text{-Jährige im Zeitpunkt } t \text{ erzielen;} \end{cases}$

$R(x,t)$ $\begin{cases} \text{die durchschnittliche Rente, die } x\text{-Jährige im Zeitpunkt } t \text{ erzielen;} \end{cases}$

$\pi(t)$ $\begin{cases} \text{den einheitlichen Beitrag, den der Sozialversicherungsträger im Jahre } t \text{ erhebt;} \end{cases}$

$F(t)$ die Reserve (Fonds) zum Zeitpunkt t;

v den Diskontierungsfaktor;

x_o, s $\begin{cases} \text{die für das System einheitlich angenommenen versicherungstechnischen Grenzalter} \\ (x_o = \text{Eintrittsalter};\ s = \text{Rentenbeginnalter}). \end{cases}$

Die Beziehung (4) kann für den Fall, daß die Reserveentwicklung während des Deckungsabschnittes nicht von Interesse ist, auch vereinfacht werden zu

$$(5)\qquad F(t_o) + \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o}\, \pi(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t)\, G(x,t) =$$

$$= \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t)\, R(x,t) + F(t_1)\, v^{t_1-t_o}\,.$$

Beschränken wir uns im Extremfalle auf einen einjährigen Deckungsabschnitt, so ergibt sich die Äquivalenz:

$$(5a) \quad F(t) + \pi(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t)\, G(x,t) = \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t)\, R(x,t) + F(t+1)\cdot v \ .$$

A II.4 Erläuterung der Finanzierungsgleichung am Beispiel einer herkömmlichen Versorgungskasse

Bevor wir nun in die eigentliche Diskussion der Ziele und Wege bei der Alterssicherung auf der Basis einer sozialen Rentenversicherung eintreten, wollen wir am Modell einer herkömmlichen Versorgungskasse die einzelnen hier zitierten Formen der Finanzierungsgleichung konkret deuten. Gleichzeitig gewährt das dabei erzielte Ergebnis mannigfaltige Vergleichsmöglichkeiten mit der zu betrachtenden Sozialversicherungseinrichtung.

Eine Pensionskasse, zu welcher der Zugang an Aktiven - wie verabredet - ausschließlich im Alter x_o erfolge, gewähre vom Alter s ab Altersrenten, die nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren finanziert werden. Der Einfachheit halber werde zunächst die Einheitsrente betrachtet, die 100 % des Einheitsgehaltes betrage, d.h. $G(x,t) = 1$; $R(x,t) = 1$. Die altersmäßige Struktur der Mitglieder entspreche der einer natürlichen Gesamtheit[8], und der Bestandsumfang sei konstant - eine Hypothese, welche bei der Betrachtung von Versorgungsunternehmen, die gegen Durchschnittsprämien versichern, häufig gemacht wird. Die altersmäßige Struktur kann dann angegeben werden als

$$(6) \quad L(x;t) = c\cdot l(x) \qquad x_o \leq x \leq \omega \ .$$

Eine säkulare Änderung der Ereigniswahrscheinlichkeiten werde nicht berücksichtigt. Die Nettoprämie beträgt dann für alle Versicherten:

---

8) S. Saxer [20], 1.Teil, S. 187

$$(7) \qquad \pi(t) = \pi = \frac{s-x_o \,|\, x_o}{\ddot{a}_{x_o:\overline{s-x_o}\,|}}$$

und das Deckungskapital

$$(8) \qquad {}_mV_{x_o} = \begin{cases} \pi \cdot \ddot{a}_{x_o:\overline{m}\,|} \; \dfrac{l(x_o)}{l(x_o+m)} \; r^m & \text{für } x_o + m < s \\ \ddot{a}_{x_o+m} & \text{für } x_o + m \geq s. \end{cases}$$

Die Gesamtreserve eines solchen Systems beträgt im Gleichgewicht - d.h., sobald $x_o \leq x \leq \omega$ -

$$(9) \qquad V_o = c \sum_{m=o}^{\omega-x_o} l(x_o+m) \; {}_mV_{x_o}$$

oder auch

$$(10) \qquad V_o = c \sum_{m=1}^{s-x_o} \sum_{\nu=o}^{m-1} l(x_o+\nu) \; r^{m-\nu} + c \sum_{m=s-x_o}^{\omega-x_o} \sum_{\nu=o}^{\infty} l(x_o+m+\nu) \; r^{-\nu} .$$

Sie ist naturgemäß unter den getroffenen Voraussetzungen eine von der Zeit unabhängige Größe. Für numerische Betrachtungen läßt sich die Reserve - hier für $c = 1$ - leicht errechnen aus der Rekursion

$$(11) \qquad V_o \cdot r + \pi \cdot r \sum_{\nu=o}^{s-x_o-1} l(x_o+\nu) - r \sum_{\nu=o}^{\omega-s} l(s+\nu) = V_1 = V_o$$

bzw.

$$(12) \qquad V_o = \frac{1}{d} \cdot A \qquad \text{mit} \quad A = \sum_{x=s}^{\omega} l(x) - \pi \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x).$$

Aus der Beziehung (12) geht die Funktion der Reserve als Zinsträger in der klassischen Versicherungsmathematik anschaulich hervor. Der Diskont d, den die Reserve pro Jahr

erbringt, schlägt sich bei festgesetzter Rentenhöhe in der Prämie π nieder. Weiterhin läßt sich aus der Beziehung (12) der Einfluß entnehmen, den die biometrische Struktur der Bevölkerung (dargestellt durch die Folge der $l(x)$), der Rechnungszinsfuß und die versicherungstechnischen Grenzalter x_o,s im Finanzierungsmodell auf die Reserve V_o ausüben.

Um nun einen anschaulichen Überblick über die Größenordnung von Prämien und Gesamtreserven im Gleichgewicht zu erhalten, sind numerische Werte für einzelne Parameterkombinationen errechnet und in Tabelle 1 dargestellt worden.

Variiert wurde dabei einmal die biometrische Struktur der versicherten Gesamtheit - durch Verwendung verschiedener Absterbeordnungen (jeweils Männer) - und zum anderen die Kombination der versicherungstechnischen Grenzalter x_o,s (Eintrittsalter und Rentenbeginnalter). In jedem der 12 Felder ist dann der obere Wert die Prämie π, errechnet nach (7), und der untere Wert die zugehörige Gesamtreserve V_o, errechnet nach (8).

Der Einfluß von Versichertenstruktur und Grenzaltern auf Prämie und die Gesamtreserve ist damit aus Tabelle 1 deutlich ersichtlich.

Auf den Fall dieser Modellkasse bezogen lauten dann für $c = 1$ die Beziehung (5a):

$$(5c) \qquad V_o + \pi \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) = \sum_{x=s}^{\omega} l(x) + V_o \cdot v$$

und die Beziehung (5):

$$(5b) \qquad V_o + \pi \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) =$$

$$= \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \sum_{x=s}^{\omega} l(x) + V_o \cdot v^{t_1-t_o} .$$

Tabelle 1

x_o;s	1924/26 M 3%	1949/51 M 3%	1960/62 M 3%
20;60	π = 0,119621 V_o = 19.241.282	0,137049 25.619.385	0,132712 25.595.057
25;60	π = 0,151848 V_o = 18.072.718	0,172799 24.108.127	0,167007 24.070.457
20;65	π = 0,070755 V_o = 13.648.146	0,084226 18.833.961	0,080088 18.551.870
25;65	π = 0,088773 V_o = 12.870.884	0,104926 17.786.687	0,099586 17.515.864

Zeitlich invariante PRÄMIEN π und GESAMTRESERVEN V_o eines sich im Gleichgewicht befindlichen Pensionssystems unter alternativen Annahmen über versicherungstechnische Grenzalter und Struktur der Gesamtheit bei gleichbleibendem Rechnungszinsfuß (3 %) und gleichbleibendem Bestandsparameter c = 1.

B. Die Reform der sozialen Altersrentenversicherung in der BRD und ihre Ziele

I. Die Reform

1. Die ursprüngliche deutsche Sozialversicherung

Als das Deutsche Reich zu Ende des vergangenen Jahrhunderts einen umfangreichen Schutz der Arbeitnehmer gesetzlich fundierte, wirkte es beispielhaft hinsichtlich der sozialen Sicherung eines großen Teiles seiner Bürger. Das Gesetzgebungswerk[9] hat einen merkbaren Einfluß auf die soziale Entwicklung in anderen Staaten ausüben können. Soweit diese soziale Sicherung die Gewährung von Altersrenten betrifft, geht der damalige Gesetzgeber noch weitgehend von den versicherungsmathematischen Grundgedanken aus, wie sie in der Privatassekuranz ausschließlich Verwendung finden. Nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren war der Beitragssatz "so zu bemessen, daß der Wert aller künftigen ... Beiträge und der sonstigen Einnahmen samt dem Vermögen den Betrag deckt, der nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Zins und Zinseszins erforderlich ist, um alle künftigen Aufwendungen zu bestreiten (Allgemeines Anwartschaftsdeckungsverfahren)."[10] Aus sozialen Erwägungen heraus ist dieser Beitragssatz natürlich keine Individualprämie wie in der privaten Rentenversicherung.[11]

Grundsätzlich erwarben aber schon damals in der Sozialver-

---

9) Als wichtigste Gesetze in diesem Zusammenhange sind hier zu erwähnen:
   1. das Gesetz über die Krankenversicherung der Arbeiter von 1883;
   2. das Unfallversicherungsgesetz von 1884;
   3. das Gesetz über die Invaliditäts- und Alterssicherung von 1889;
   4. Zusammenfassung von 1., 2. und 3. in der Reichsversicherungsordnung von 1911;
   5. das Angestelltenversicherungsgesetz von 1911.

10) § 1391 Abs.1 RVO a.F.

11) S. Verbandskommentar, [34], S. 293

sicherung die Versicherten durch eigene Beitragsleistungen einen Rechtsanspruch auf Rentenleistung, wobei sich die Höhe der Rente nach der Zahl und der Höhe der geleisteten Beiträge richtet. Diesem rechtlichen Anspruch steht nun - zumindest in der ersten Periode der Tätigkeit der sozialen Rentenversicherungen - eine versicherungsmathematische Reserve gegenüber. Diese beiden Ansprüche - und das ist das Entscheidende - entsprechen sich im Mittel.

B I.2 Notwendigkeit und Ansatzpunkt einer Sozialreform

Die Soziale Rentenversicherung gewährte vor der Reform im Jahre 1957 Renten, die sich aus einem Grundbetrag und Steigerungsbeträgen zusammensetzten. Der Grundbetrag war fester Bestandteil der Rente[12)], während Steigerungsbeträge einen unmittelbaren Ausgleich für Versicherungsbeiträge gewähren und der Anpassung der Rente an das frühere Arbeitseinkommen des Versicherten[12)] dienen sollten. Die Steigerungsbeträge wurden dabei als Prozentsatz der Summe aller im Laufe des Versichertenlebens bezogenen Nominaleinkommen berechnet. Wegen des laufenden Anstiegs der Lebenshaltungskosten lag der Realwert des nominellen Rentenbetrags im Zeitpunkt seiner Festsetzung schon weit unter dem entsprechenden Realwert der früher bezogenen Nominaleinkommen. Und zwar traf dieses Prinzip der nominellen Gleichheit diejenigen am stärksten, die die längsten Versicherungszeiten zurückgelegt hatten.

Diese Benachteiligung der Versicherten wäre nur im Falle eines gleichbleibenden Preisniveaus nicht aufgetreten.

Schon sehr bald nach der Konstituierung der Deutschen Bundesrepublik, noch während der ersten Legislaturperiode, begann die Forderung einer Sozialreform zum zentralen Thema der deutschen Innenpolitik zu werden. Der verlorene Krieg und seine Folgeereignisse hatten die Sozialversicherung finanziell ausgehöhlt und zudem erhebliche zusätzliche

---

12) S. Verbandskommentar, [34], S. 170 p

Leistungsanforderungen verursacht. Aber auch die soziologischen und wirtschaftlichen Verhältnisse hatten seit der Einführung der Sozialversicherung im vergangenen Jahrhundert entscheidende Veränderungen erlitten und erforderten eine soziale Reform größeren Ausmaßes.

So wurde am 23. Januar 1952 im 1. Bundestag von der Fraktion der SPD der Antrag auf Einsetzung einer Sozialen Studienkommission eingebracht, die mit der Aufgabe betraut werden sollte, die damaligen sozialen Einrichtungen und Leistungen festzustellen, "die Möglichkeiten der Entflechtung dieser sozialen Leistungen und ihrer systematischen Intensivierung zu prüfen und einen Plan zur sozialen Sicherung in Deutschland aufzustellen."[13]

Im Februar des gleichen Jahres wurde dann ein Beirat beim Bundesministerium für Arbeit berufen mit der Aufgabe, gesetzgeberische Maßnahmen vorzubereiten über "die finanzielle Sicherung, Neuordnung und fortschrittliche Entwicklung der sozialen Leistungen, unter klarer Abgrenzung von Versicherung, Versorgung und Fürsorge".[14]

Dieser Beirat setzte sich zusammen aus Vertretern der Parteien, der Spitzenverbände der Sozialpartner und der Sozialleistungsträger sowie aus Wissenschaftlern und sonstigen Sachverständigen. Interessant in diesem Zusammenhange ist die Priorität, die der finanziellen Sicherung eingeräumt wird. Mit dieser Maßnahme begann die ausgedehnte Diskussion um Ziele und Möglichkeiten der Neugestaltung sozialer Sicherung, deren finanziell gesehen bedeutendsten Teil die Alterssicherung darstellt.

B I.3 Die grundlegende Zielvorstellung bezüglich der Reform

Betrachtet man die Zielvorstellungen der an der Reform beteiligten Sozialpolitiker, so ist grundsätzlich das oberste Anliegen, den nicht mehr aktiv im Wirtschaftsleben Stehenden

13) S. [23], S. 3

14) S. [7], S. 4

(Invaliden oder Rentnern) eine Existenzgrundlage zu sichern. Das alte, auf der nominellen Äquivalenz von Leistung und Gegenleistung aufbauende Rentensicherungssystem wurde als dieser Aufgabe nicht mehr gewachsen betrachtet, und das Ziel war es nunmehr, die "soziale Sicherung für die Alten und Invaliden, Witwen und Waisen entsprechend den gesellschaftlichen Erfordernissen und wirtschaftlichen Gegebenheiten unserer Zeit neu zu gestalten".[15)]

Bezeichnenderweise ist schon hier den gesellschaftlichen Erfordernissen die Priorität gegenüber den wirtschaftlichen Gegebenheiten eingeräumt, wie auch im Gesetz selbst die "Aufbringung der Mittel" erst im Anschluß an die "Leistungen der Versicherung" behandelt werden.

Als Möglichkeiten für die Realisation der oben genannten Sicherung der Existenzgrundlage werden in der Begründung zum Regierungsentwurf[16)] genannt:

1. Umfassende Sicherung durch Erhöhung der Leistungen und Vermehrung der Leistungsarten unter Berücksichtigung der eigenen Lebensleistung;
2. Der Wirtschaftsentwicklung entsprechende Sicherung durch Anpassung an die jeweiligen wirtschaftlichen Verhältnisse.

Dabei sollte entsprechend den Vorstellungen der Sozialpolitik die Rentenbemessung den "Funktionswandel der Rente" berücksichtigen, d.h. der Tatsache gerecht werden, daß die Renten für den größten Teil der Bevölkerung bei Aufgabe ihrer Erwerbstätigkeit das einzige Einkommen darstellen und damit praktisch als Lohnersatz fungieren.

In diesem Zusammenhange können grundsätzlich zwei Ziele angestrebt werden, nämlich einmal die Kaufkraftäquivalenz zwischen den unter Konsumverzicht gezahlten Beiträgen und der Rentenleistung und zum anderen die Erhaltung der Stellung des einzelnen im Sozialgefüge. Dem letzteren weiterge-

---

15) S. Regierungsentwurf, [6], S. 119 ff.
16) S. Regierungsentwurf, [6], S. 176

henden Ziel wurde jedoch der Vorzug gegeben.

Dabei ging man davon aus, daß das Einkommen des einzelnen aktiv Versicherten seinen Beitrag zur Erstellung des Sozialproduktes der jeweiligen Periode zum Ausdruck bringt. Die Beiträge zur Sozialversicherung werden grundsätzlich (von der Beitragsbemessungsgrenze sei hier zunächst abgesehen) proportional zum Einkommen erhoben. Somit bietet das Verhältnis des Individualeinkommens zum Durchschnittseinkommen aller Versicherten eine gute Meßziffer für die Stellung des einzelnen im Sozialgefüge zu verschiedenen Zeitpunkten.

B. II Die sozialpolitischen Zielkomponenten im einzelnen

1. Rentenniveau

Dieses im letzten Abschnitt erwähnte globale Ziel der "Erhaltung des Lebensstandards", das oben als oberste Forderung der Sozialpolitik bezüglich der Altersrentengestaltung genannt wurde, ist jetzt auf seine Komponenten zu untersuchen.

Die erste Komponente ist die Rentenhöhe, die vor der Reform in vielen Fällen so niedrig war, daß der Altersrentner in den Bereich der Sozialfürsorge verwiesen wurde. So wurde die Forderung, den Rentner durch höhere Leistungen finanziell erheblich besser zu stellen, zu einem der Ausgangspunkte der Rentenreform. In diesen Bereich gehört auch die Forderung nach dem Funktionswandel der Altersrente, die nunmehr Lohnersatzfunktion haben sollte.
Bezüglich dieses Funktionswandels heißt es in der Begründung zum Regierungsentwurf des Rentenversicherungsgesetzes: "Sie wandelt sich vom Zuschuß zum Lebensunterhalt zu einer Lebensgrundlage, die den Rentner aus der Nähe des Fürsorgeempfängers in die Nachbarschaft des Lohnempfängers rückt."[17)]

---

17) S. Regierungsentwurf, [6], S. 176
sowie Richter [19], C V, S. 41

Mithin mußten also zur Bemessung der Rente vergleichbare Aktiveneinkommen herangezogen werden. Die Versorgung der Beamten und der ihnen Gleichgestellten, die normalerweise eine Altersrente von 75 % der letzten Dienstbezüge erhalten, wurde in der Debatte oftmals als wünschenswerte Versicherungsleistung herausgestellt.

Deutlich wird diese Forderung der Vollversorgung durch die Altersrente z.B. von Schellenberg[18] erhoben, der sagt: "Die Sozialdemokraten wünschen, daß die neue Alterssicherung der Angestellten und Arbeiter in ihrem wirtschaftlichen und sozialen Gehalt der von Beamten entspricht ...".

Bereits vorher war in der "Rothenfelser Denkschrift"[19] gleichfalls der Anteil von 75 v.H. des Arbeitseinkommens als ausreichend zur Aufrechterhaltung des Lebensstandards genannt worden. Jedoch wurde dabei das Gesamteinkommen der Rentner zugrunde gelegt, das lediglich zu zwei Dritteln durch die soziale Rentenversicherung gedeckt sein sollte.

B II.2 Rentenstruktur

Die zweite Komponente des Ziels "der Erhaltung des Lebensstandards" ist die Forderung, daß die Struktur der Einkommensverhältnisse der Rentner möglichst eine Abbildung der Einkommensverhältnisse des gleichen Personenkreises während ihrer Aktivenzeit darstellen solle. Diese erwünschte Strukturgleichheit zwischen den Aktiven- und den Rentnereinkommen führte auf die sog. "Rentenformel", der Reform von 1957 (dem Berechnungsverfahren für Altersrenten), die als wichtigste Neuerung gegenüber den bis dahin geltenden Vorschriften als das "Kernstück der Rentenreformgesetze"[20] bezeichnet wird.

---

18) S. Richter [21], S. 9

19) S. Achinger u.a., [1], S. 3 ff.

20) S. Jantz und Zweng, [15], S. 98

Hierbei sind die die (individuelle) Jahresaltersrente R_j bestimmenden Größen:

j = Kalenderjahr der Rentenfestsetzung,

n = mit Beiträgen belegte Versicherungsjahre des Versicherten,

N = gesamte anrechnungsfähige Versicherungsjahre,

ε = Rentensatz (für die Altersrente ε=0,015), [21]

$G^i(t)$ = individuelles Arbeitsentgelt eines Versicherten im Kalenderjahr t,

$G(t)$ = durchschnittliches Arbeitsentgelt aller Versicherten (ohne Lehrlinge und Anlernlinge) im Kalenderjahr t,

B_n = individuelle Bemessungsgrundlage eines Versicherten bei n Beitragsjahren,

A_j = allgemeine Bemessungsgrundlage für Versicherungsfälle, die im Kalenderjahr j eintreten.

Die Bemessungsgrundlagen sind gesetzlich definiert als:

$$(13) \qquad B_n = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{G^i(t)}{G(t)} \qquad [22] \qquad \text{bzw.}$$

$$(14) \qquad A_j = \frac{1}{3} \left[G(j-4) + G(j-3) + G(j-2)\right] \qquad [23]$$

Durch diese Bestimmung der Allgemeinen Bemessungsgrundlage nach der Methode der gleitenden Mittelwerte kommt eine gewisse Kontinuität in die Entwicklung.
Nach diesen Definitionen wird die im Jahre j erstmals zu zahlende (individuell verschiedene) Altersrente festge-

---

21) Der Rentensatz ist ein Proportionalitätsfaktor, der in dieser Höhe auf Grund sozialpolitischer Erwägungen festgelegt wurde. S.a. C III

22) § 1255 Abs. 1 RVO

23) § 1255 Abs. 2 RVO

setzt als

$$(15) \qquad R_j = N \cdot \frac{B_n}{100} \cdot A_j \cdot \varepsilon \quad .$$

Das Rentenbeginnalter ist im Modell einheitlich mit 65 angenommen. Setzen wir hier einmal - grob vereinfachend - $G^i(t) = G(t) = G$, woraus folgt $A_j = G$, so wird eine Altersrente von

$$(16) \qquad R_j = N \cdot G \cdot \varepsilon = R$$

erreicht, in der die einzige Variable die Zahl der Versicherungsjahre ist.

Bei 40 Versicherungsjahren ergibt sich so eine Altersrente von 60 % des individuellen, zeitlich konstanten Einkommens.[24)]

Bei jeder Einkommensprogression sind diese 60 % wegen (14) jedoch auf das Jahr j-3 zu beziehen. Die Rente wird also - gemessen am letzten Aktiveneinkommen (im Jahre j-1) - je nach Art der Progression geringer ausfallen.[25)]

Aus dem Ziel der "Standarderhaltung" folgt nun aber die Notwendigkeit, die Neurente, die nach der oben beschriebenen Methode entsprechend den allgemeinen und individuellen Einkommensverhältnissen festgesetzt wurde, auch in der Folge den allgemeinen Einkommensverhältnissen anzupassen. Würde der Festsetzung der Neurente im Rentenbeginnalter keine Korrektur während der Rentenlaufzeit folgen, so bliebe zwar die soziale Schichtung innerhalb des Rentnerjahrganges

---

24) Diese 60 % unter idealen Bedingungen sind als Kompromiß zwischen der Forderung nach Volldeckung der Altersversorgung (in Höhe von 75 % eines durchschnittlichen individuellen Einkommens) durch die soziale Altersrente einerseits und nach Teildeckung in Höhe von 2/3 (siehe Fußnote 19) andererseits zu verstehen.

25) S. Heubeck [14], S. 27

auf Grund der Rentenfestsetzung auch weiter erhalten, die Rentnergeneration als Gesamtheit würde aber bei steigenden Entgelten gegenüber den Aktiven eine zunehmende Verschlechterung in Kauf nehmen müssen.

Für die solchermaßen notwendige Anpassung müßte dabei gleichfalls ein Maßstab gewählt werden, der der Lohnentwicklung möglichst nahekommt. Eine Größe, die dieser Forderung weitgehend entspricht, ist die oben bereits zitierte Allgemeine Bemessungsgrundlage A_j.

Diesen Weg der Anpassung von Bestandsrenten an die Allgemeine Bemessungsgrundlage schlug dann der Gesetzgeber ein[26], um sicherzustellen, "daß das Mißverhältnis, das bisher zwischen dem Lebensstandard der Rentner und der erwerbstätigen Bevölkerung bestanden hat, und das nunmehr beseitigt wird (durch die Festsetzung der Neurente, d.Verf.) in Zukunft nicht wiederentsteht."[27]

Für eine im Jahre j (erstmals) festgesetzte Altersrente der Höhe R_j ergibt sich also nach t-maliger Anpassung

$$(17) \qquad R_{j+t} = R_j \prod_{\nu=1}^{t} \frac{A_{j+\nu}}{A_{j-1+\nu}} = R_j \frac{A_{j+t}}{A_j} \qquad 28)$$

B II.3 Personenkreis

Neben den - verglichen mit der Lösung in der alten deutschen Sozialversicherung - sehr weit gesteckten Zielen bezüglich der Rentenhöhe und Rentenstruktur gehen aber die

---

26) ArVNG §§ 1272 - 1275

27) S. Regierungsentwurf, [6], S. 201

28) Mit dieser Unterstellung, daß die Bestandsrenten alljährlich an die Änderung der Allgemeinen Bemessungsgrundlage vom vorletzten Jahre auf das letzte Jahr angepaßt werden, ist gerechnet worden in den "Versicherungstechnischen Bilanzen 1961/63" [4], S. 10

Forderungen der Sozialreformer auch in anderer Hinsicht weit über die alte Regelung vor der Reform hinaus.

Hier ist zunächst die Frage nach der Abgrenzung des Kreises der Versicherten. Während nach altem Recht die Angestellten nur bis zu einer gewissen Einkommensgrenze versicherungspflichtig waren, sah der Regierungsentwurf des Gesetzes zur Neuregelung des Rechts der Rentenversicherung der Angestellten eine generelle Einbeziehung aller Angestellten ohne Rücksicht auf die Höhe des Arbeitsentgelts vor.[29)]

Der diesem Gesetzentwurf vorhergehende "Entwurf eines Gesetzes über die Rentenversicherung der Arbeiter und Angestellten"[30)] sah gleichfalls die Versicherung aller "gegen Entgelt Beschäftigten" (§ 1) vor und stellte die freiwillige Versicherung allen nicht bereits Pflichtversicherten[31)] anheim (§ 4). Diese Forderung wurde auch im Jahre 1965 in dem Programm für eine allgemeine "Volksversicherung" erneuert.[32)]

Man sieht also deutlich die Tendenz, den Kreis der Versicherungspflichtigen weitgehend auszudehnen.[33)]

Allerdings kann das, was hier als sozialpolitische Zielvorstellung zitiert wurde, unter gewissen zusätzlichen Bedingungen auch als Mittel zur kurzfristigen finanziellen Realisation anderer Forderungen benutzt werden.

B II.4 Altersgrenze

Eine weitere sozialpolitische Zielvorstellung betrifft die allgemeine Altersgrenze für den Bezug von Altersrenten. Hier beschränkte man sich jedoch darauf, in der Reform die schon vorher geltende Regelung beizubehalten, die die all-

---

29) Regierungsentwurf, [6], Art.2, § 2

30) S. [24]

31) Mit geringen, finanziell nicht ins Gewicht fallenden Ausnahmen

32) S. [25], S. 9

33) S. hierzu auch [5]

gemeine Altersgrenze für Männer auf das Alter 65 festgesetzt hatte.[34] Lediglich für Ausnahmefälle wurde eine - bezüglich des Rechts vor der Reform - weitergehende Regelung getroffen. Regierung, Opposition und Gewerkschaften waren sich in dieser Forderung weitgehend einig, und nur die Grenzfälle nahmen in der Diskussion einen breiteren Raum ein, so z.B. die Forderung der Gleichstellung über 60-jähriger arbeitsloser Arbeiter mit entsprechenden Angestellten.[35]

Weitergehende Forderungen wurden als sozialpolitische Zielvorstellungen erst nach dem Inkrafttreten der Rentenreform gestellt.[36]

C. Spezifizierung des Ausgangsmodells und formale Fassung der Zielvorstellungen

I. Spezifizierung des Ausgangsmodells bezüglich der monetären Größen

Zur Abbildung der realen wirtschaftlichen und biometrischen Vorgänge auf den finanziellen Bereich benutzen wir ein Modell, das im wesentlichen durch die auf Seite 12 angegebene Finanzierungsgleichung (4) definiert wird.

$$\sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t) + \pi(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t)\, G(x,t)\} =$$

$$= \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t+1)\, v + \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t)\, R(x,t)\}$$

Dieses Modell soll es ermöglichen, die Auswirkungen verschiedenster Gesetzmäßigkeiten im System zu beurteilen.

---

34) Weibliche Versicherte erhalten unter gewissen Bedingungen auf Antrag auch dann Ruhegeld, wenn sie das 60. Lebensjahr vollendet haben (vorgezogenes Altersruhegeld). § 1248 RVO

35) S. Regierungsentwurf, [6], § 1253

36) S. DGB Aktionsprogramm, [8], S.141

Solche Gesetzmäßigkeiten werden uns bezüglich der monetären Größen $G(x,t)$ und $R(x,t)$ im allgemeinen nur hinsichtlich der Zeit t interessieren.[37] Wir werden also als erste Spezifizierung die Größen $G(t)$ und $R(t)$ als gewogene Mittelwerte betrachten. In dieser Form treten sie praktisch als "Durchschnittliches Entgelt aller Versicherten" oder "Durchschnittsrente" auch auf.

Die Finanzierungsgleichung lautet dann in der abgeänderten Form

$$(18)\quad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t) + \pi(t)\, G(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t)\} = \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t+1)\, v + R(t) \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t)\}.$$

C II Spezifizierung des Ausgangsmodells bezüglich der biometrischen Größen

1. Allgemeine zeitliche Entwicklung des Zuganges

Hinsichtlich der biometrischen Größen $L(x,t)$ ist die Abhängigkeit von x und t durch die Ausscheidewahrscheinlichkeiten und den Zugang (hier ohne Berücksichtigung säkularer Änderungen) gegeben, wenn man von Wanderungen absieht.
Wir bezeichnen die Anzahl der Neugeborenen (Zugang) im Zeitpunkt t mit

$$(19)\quad L(0,t) = L\, \psi(t).$$

---

37) In den Versicherungstechnischen Bilanzen 1961/1963 wurde z.B. eine gleichbleibende Struktur der Entgelte vorausgesetzt und die einzelnen Stufengrenzen in geometrischer Progression unter alternativen Annahmen bezüglich der Stärke der Progression fortgeschrieben.
S. [4], S. 70 ff.

Hierbei werde $\psi(t)$ so normiert, daß zum Zeitpunkt des Ausganges der Betrachtungen (Anfangszeitpunkt) t_o

(2o) $\qquad \psi(t_o) = 1.$

Damit gibt L den Zugang zum Zeitpunkt t_o an:

(21) $\qquad L(o,t_o) = L.$

Es ist also der Bestand an x-Jährigen zum Zeitpunkt $t > t_o + x$

$$(22) \qquad L(x,t) = L \cdot \psi(t-x) \, \frac{l(x)}{l(o)}$$

und der Gesamtbestand zum gleichen Zeitpunkt

$$(23) \qquad B(t) = \sum_{x=o}^{\omega} L(x,t) = \frac{L}{l(o)} \sum_{x=o}^{\omega} \psi(t-x) \, l(x).$$

Der für Entwicklungsbetrachtungen einfachste Fall ist der absolute Beharrungszustand, der wegen der Identität $\psi(t) \equiv$ keinerlei Probleme bietet. Die Gesamtheiten

$$(22a) \qquad L(x,t) = \frac{L}{l(o)} \, l(x) = L(x) \quad \text{und}$$

$$(23a) \qquad B(t) = \frac{L}{l(o)} \sum_{x=o}^{\omega} l(x) = B$$

bleiben im Zeitablauf konstant.

Häufig wird für den Zugang exponentielle Progression angenommen.[38] Es wird also gesetzt

$$(24) \qquad \psi(t) = \exp\left(\frac{t-t_o}{\alpha}\right) = \lambda^{t-t_o} \qquad \text{mit } \lambda = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Die mit Hilfe dieser Zugangsfunktion definierte Bevölkerung wird wegen der Konstanz des Verhältnisses

---

38) S. Heubeck [13], S.231 ff. sowie Thullen [33], S. 198

$$(25) \qquad \frac{B(t+1)}{B(t)} = \frac{L(x,t+1)}{L(x,t)} = \lambda$$

bei

$$(26) \qquad L(x,t) = L(x,t_o)\ \lambda^{t-t_o}$$

als "stabile Bevölkerung" (auch "Bevölkerung im relativen Beharrungszustand") bezeichnet.

In diesem Abschnitt (C II.1) haben wir, um es noch einmal zusammenzufassen, den Zugang an O-Jährigen als zunächst allgemeine Funktion der Kalenderzeit t aufgefaßt und später dafür die exponentielle Progression als Spezialfall eingeführt. Schließt man bei dieser Betrachtung Wanderungen aus, so sind damit auch die Bestände an x-Jährigen L(x,t), $(0 < x \leq \omega)$ und der Gesamtbestand B(t) Funktionen der Zeit t. Es wurde also hier mit Zugängen an allen Zeitpunkten t gerechnet, ohne deren Zustandekommen substantiell zu erklären.

C II.2 Substantielle Erklärung des Zuganges (Reproduktion)

Im folgenden wollen wir nun den Zugang nicht als autonome Größe auffassen, sondern der Tatsache Rechnung tragen, daß er substantiell durch die Reproduktion entsteht, wenn Wanderungsbetrachtungen wiederum vernachlässigt werden können.
Es ist in der Bevölkerungsstatistik üblich[39], bei Bevölkerungsreproduktionen die Neugeborenen stets auf die weibliche Bevölkerung zu beziehen. Wir werden daher vorübergehend die Indizes m bzw. w für die männliche bzw. die weibliche Bevölkerung einführen.

Es seien hier speziell mit $L_m(x,t)$ und $L_w(x,t)$ die Anzahl der x-jährigen Männer bzw. der x-jährigen Frauen zum Zeitpunkt t, mit $l_m(x)$ und mit $l_w(x)$ die Überlebenden der Sterbetafel für Männer bzw. für Frauen und mit $B_m(t)$ und

39) S. z.B. Statistisches Bundesamt, [27], [28]

$B_w(t)$ die Gesamtheit aller Männer bzw. Frauen zum Zeitpunkt t bezeichnet. Damit erhält man für den Gesamtbestand im Zeitpunkt t

$$(27) \qquad B(t) = B_m(t) + B_w(t) = \sum_{x=o}^{\omega} L_m(x,t) + \sum_{x=o}^{\omega} L_w(x,t) =$$

$$= \sum_{x=o}^{\omega} L_m(o,t-x) \frac{l_m(x)}{l_m(o)} + \sum_{x=o}^{\omega} L_w(o,t-x) \frac{l_w(x)}{l_w(o)}$$

und für den Zugang an Neugeborenen im Zeitpunkt t

$$(28) \qquad L(o,t) = L_m(o,t) + L_w(o,t),$$

oder wenn man eine zeitlich konstante Sexualproportion

$k \quad (= \frac{\text{lebendgeborene Knaben}}{\text{lebendgeborene Mädchen}})$ voraussetzt,

$$(29) \qquad L(o,t) = (1 + k)\, L_w(o,t).$$

Durch die Tatsache der ständigen Reproduktion wird der Zugang ganz allgemein von einem Ausgangsbestand, den Sterblichkeitsverhältnissen und den Fruchtbarkeitsverhältnissen abhängen. Zur Darstellung der Fruchtbarkeitsverhältnisse werden die altersspezifischen Fruchtbarkeitsziffern f(x) verwendet, die die durchschnittliche Anzahl der von einer x-jährigen Frau lebendgeborenen Mädchen angeben, wobei f(x) nur in den gebärfähigen Altersjahren $x_1 \leq x \leq x_2$ der Frauen von Null verschieden ist. Die Sterblichkeitsverhältnisse finden wieder in den $l_m(x)$ und $l_w(x)$ ihren Ausdruck; säkulare Änderungen sollen bei diesen Einflußgrößen vernachlässigt werden. Beginnen wir unsere Betrachtungen der Zugangs- und Bestandsentwicklung zu einem Zeitpunkt t_o, so ist der für die Reproduktion wichtige weibliche Ausgangsbestand

$$B_w(t_o) = \sum_{x=o}^{\omega} L_w(x,t_o).$$

Für jedes $t \geq t_o + \omega$ können wir dann die Anzahl der neugeborenen Mädchen und Knaben mit

$$(30a) \qquad L_w(0,t) = \sum_{x=x_1}^{x_2} L_w(x,t-1) \cdot f(x)$$

bzw.

$$(30b) \qquad L_m(0,t) = \sum_{x=x_1}^{x_2} L_w(x,t-1) \cdot k \cdot f(x)$$

angeben. Ersetzen wir in (30a) $L_w(x,t-1)$ durch $L_w(0,\ t-x-1)\ \frac{l_w(x)}{l_w(o)}$, so folgt für $L_w(0,t)$ die Rekursionsformel

$$(31a) \qquad L_w(0,t) = \sum_{x=x_1}^{x_2} L_w(0,\ t-x-1)\ \frac{l_w(x)}{l_w(o)}\ f(x),$$

aus der wir sukzessive die Anzahl der neugeborenen Mädchen berechnen können. Infolge der Konstanz der Sexualproportion k erhält man damit für die Anzahl $L_m(0,t)$ der neugeborenen Knaben die entsprechende Rekursionsformel

$$(31b) \qquad L_m(0,t) = \sum_{x=x_1}^{x_2} L_w(0,\ t-x-1)\ \frac{l_w(x)}{l_w(o)}\ k \cdot f(x) =$$

$$= k \cdot L_w(0,t) = \sum_{x=x_1}^{x_2} L_m(0,\ t-x-1)\ \frac{l_w(x)}{l_w(o)}\ f(x).$$

Setzt man weiter (31a) und (31b) in (27) ein, und benutzt man dabei den Buchstaben y anstelle von x, da x in den Beziehungen (31a) und (31b) bereits verwendet worden ist, so folgt

$$B(t) = \sum_{y=o}^{\omega} \left\{ \left(\sum_{x=x_1}^{x_2} L_m(0,\ t-x-y-1)\ \frac{l_w(x)}{l_w(o)}\ f(x) \right) \frac{l_m(y)}{l_m(o)} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{x=x_1}^{x_2} L_w(0,\ t-x-y-1)\ \frac{l_w(x)}{l_w(o)}\ f(x) \right) \frac{l_w(y)}{l_w(o)} \right\}$$

und weiter durch einfache Umformung:

$$B(t) = \sum_{x=x_1}^{x_2} \Big(\sum_{y=o}^{\omega} L_m(y,t-x-1)+L_w(y,t-x-1) \Big) \frac{l_w(x)}{l_w(o)} f(x),$$

wofür wir kurz

$$(32) \quad B(t) = \sum_{x=x_1}^{x_2} B(t-x-1) \frac{l_w(x)}{l_w(o)} f(x)$$

schreiben können.

Für die gesamte Bevölkerung B(t) hat sich also die gleiche Rekursionsformel ergeben wie für den Neuzugang an Mädchen (31a) und an Knaben (31b). Es ist leicht einzusehen, daß diese Rekursionsformel sowohl für den gesamten Neuzugang L(O,t) als auch für die Bevölkerungsteile $B_m(t)$ und $B_w(t)$ gültig ist.

C II.3 Bestimmungsgleichung für den Wachstumsfaktor

Die Rekursionsformel (32) ermöglicht einmal die Fortschreibung der Bevölkerung B(t) und stellt andererseits eine lineare homogene Differenzengleichung (x_2+1)ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die nur an ganzzahligen Argumentstellen definierte Funktion B(t) dar, so daß B(t) auch als Lösung dieser Differenzengleichung ermittelt werden kann.

In der üblichen Form geschrieben lautet die Differenzengleichung (32)

$$(33) \quad B(t) = \sum_{\nu=1}^{x_2+1} B(t-\nu) a_\nu$$

$$\text{mit} \quad a_\nu \begin{cases} = 0 & \text{für } 1 \le \nu \le x_1 \\ = \dfrac{l_w(\nu-1)}{l_w(o)} f(\nu-1) & \text{für } x_1+1 \le \nu \le x_2+1. \end{cases}$$

Setzen wir in (33) den Lösungsansatz $B(t) = \lambda^t$ ein, so erhalten wir

$$\lambda^t = \sum_{\nu=1}^{x_2+1} a_\nu \lambda^{t-\nu}.$$

Setzen wir nun noch voraus $\lambda \neq 0$, dividieren die rechte und die linke Seite durch $\lambda^{t-(x_2+1)}$ und bringen alle Glieder auf eine Seite, so erhalten wir für λ die algebraische Gleichung (x_2+1)ter Ordnung

$$\lambda^{x_2+1} - \sum_{\nu=1}^{x_2+1} a_\nu \lambda^{x_2+1-\nu} = 0 , \tag{34}$$

die die charakteristische Gleichung der Differenzengleichung (33) darstellt.

Nach der Theorie der linearen homogenen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten hat die Lösung von (33), wenn die x_2+1 Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle voneinander verschieden sind und mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{x_2+1}$ bezeichnet werden, die Form

$$B(t) = \sum_{\nu=1}^{x_2+1} c_\nu \lambda_\nu^t , \tag{35}$$

wobei die Größen c_ν durch den Ausgangsbestand eindeutig bestimmt sind.

Zur numerischen Ermittlung von B(t) wäre diese Formel zu umständlich, da alle x_2+1 Wurzeln (praktisch 46 bis 50) der Gleichung (34) ermittelt werden müßten; aber für die Diskussion der möglichen Lösungen bei großem t ist sie besonders geeignet. Hierbei hat die Koeffizientensumme

$$\sum_{\nu=1}^{x_2+1} a_\nu = \frac{1}{l_w(o)} \sum_{x=x_1}^{x_2} l_w(x)\, f(x) = R_o , \tag{36}$$

die in der Bevölkerungsstatistik unter der Bezeichnung "reine Reproduktionsziffer" benutzt wird, eine entscheidende Bedeutung. Nach den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung über rekurrierende Ereignisse und über das darauf basierende Erneuerungsproblem[40] kann man anhand von R_o

---

40) S. Feller [10], Kap. 12, 13

über das Verhalten von B(t) bei großem t folgende Aussagen machen:

Ist $R_o < 1$, so strebt B(t) gegen 0, d.h., die Bevölkerung stirbt aus;

Ist $R_o = 1$, so strebt B(t) gegen einen bestimmten Wert, d.h., es tritt der absolute Beharrungszustand ein;

Ist $R_o > 1$, so geht B(t) in eine Exponentialfunktion $c \cdot \lambda^t$ über.

Der letzte, bei den gegenwärtigen Geburts- und Sterblichkeitsverhältnissen realistische Fall läßt sich leicht auf Grund der bewiesenen Tatsache einsehen, daß im Falle $R_o > 1$ eine einzige positive Wurzel λ existiert, die größer als die Absolutbeträge aller übrigen Wurzeln ist. Dann überwiegt auf der rechten Seite der Formel (35) das Glied mit dieser Wurzel mit wachsendem t immer mehr alle übrigen, bis diese nicht mehr ins Gewicht fallen. Exakt ausgedrückt gilt

$$(37) \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{B(t+1)}{B(t)} = \lambda .$$

Die gleiche Grenzbeziehung gilt in Übereinstimmung mit den für das kontinuierliche Erneuerungsproblem gewonnenen Resultaten von Lotka[41] auch für die Anzahl der Neugeborenen $L(0,t)$, $L_w(0,t)$ und $L_m(0,t)$.

Damit ist gewissermaßen die Berechtigung hergeleitet, bei hypothetischen Betrachtungen über die Bevölkerungsentwicklung das Exponentialgesetz heranzuziehen.

C II.4 Iterative Berechnung des Wachstumsfaktors

Im konkreten Falle interessiert neben der numerischen Größe λ auch noch die Zeit, nach welcher sich praktisch mit hinreichender Genauigkeit das Exponentialgesetz einspielt,

---

41) S. Dublin und Lotka [9], S. 305 ff.

wenn von einem gegebenen Anfangsbestand ausgegangen wird. Beides liefert uns das folgende Iterationsverfahren in praktisch ausreichender Näherung.

Vorgegeben sind die Größen:

$L_w(x,t_o)$ Ausgangsbestand der weiblichen Bevölkerung;

$l_w(x)$ eine bestimmte Abgangsordnung;

$f(x)$ empirisch errechnete altersspezifische Fruchtbarkeitsziffern.

Durch fortgesetzte Anwendung der Iterationsformeln

(38a) $$B_w(t) = \sum_{x=o}^{\omega} L_w(x,t) ;$$

(38b) $$L_w(0,t+1) = \sum_{x=o}^{\omega} L_w(x,t)\ f(x) ;$$

(38c) $$L_w(x,t+1) = L_w(x-1,t)\ \frac{l_w(x)}{l_w(x+1)} ;$$

(38d) $$B_w(t+1) = \sum_{x=o}^{\omega} L_w(x,t)\ \frac{l_w(x+1)}{l_w(x)} + L_w(0,t+1)$$

erhalten wir die Funktionen

(39a) $$g_1(t) = \frac{L_w(0,t+1)}{L_w(t)}$$ (Wachstumsfaktor des Zuganges in Abhängigkeit von der Zeit);

und

(39b) $$g_2(t) = \frac{B_w(t+1)}{B_w(t)}$$ (Wachstumsfaktor des Gesamtbestandes in Abhängigkeit von der Zeit).

Diese beiden Funktionen gehen auf Grund von (37) gegen λ.

In dem folgenden durchgerechneten Beispiel wurden als numerische Werte benutzt:

$L_w(x,t_o)$ weibliche Wohnbevölkerung am 6.6.1961[42] (S. Tabelle 2, S. 84)

$l_w(x)$ Werte nach der Allgemeinen Sterbetafel (Frauen) für die BRD 1960/62 [43] (S. Tabelle 2)

$f(x)$ lebendgeborene Mädchen pro Frau des Alters x (ermittelt aus den Angaben für die BRD im Jahre 1963)[44] (S. Tabelle 2)

Hier wurde dem Jahre 1963 der Vorzug gegeben, weil für 1963 sowohl der Index der Gesamtfruchtbarkeit als auch die allgemeine Fruchtbarkeitsziffer höher lag als für 1961.

Die numerischen Berechnungen selbst wurden auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanalge SIEMENS 2002 durchgeführt, und die so gewonnenen Ergebnisse finden sich in Darstellung 1 und Darstellung 2 auf S.39 bzw. S.40.

Darstellung 1 enthält den Wachstumsfaktor des Zuganges in Abhängigkeit von der Zeit $g_1(t)$, und Darstellung 2 enthält den Wachstumsfaktor des Gesamtbestandes in Abhängigkeit von der Zeit $g_2(t)$.

An diesen Darstellungen läßt sich erkennen, daß das Wachstum für den Gesamtbestand und für den Zugang gegen den Wert $\lambda \approx 1{,}005$ geht,

---

42) Statistisches Jahrbuch 1963, [30], Beilage: Ausgewählte Strukturdaten aus der Volks- und Berufszählung vom 6. Juni 1961, S. 5, 6

43) S. [29]

44) Statistisches Jahrbuch 1966, [30],
S. 60: Geborene nach dem Alter der Mütter;
S. 55: Knaben auf 1000 lebendgeborene Mädchen.

Als Vergleich sei hier noch die reine Reproduktionsziffer, gleichfalls bezogen auf die weibliche Bevölkerung, angegeben. Sie beträgt $R_o = 1{,}1676$.[45)]

Man sieht hieran, daß R_o eine Information lediglich bezüglich der Entwicklungsrichtung der Gesamtheit (Zu- oder Abnahme) enthält.

C.III Die formale Fassung der Zielvorstellungen im Modell

Die formale Fassung der Zielvorstellungen, in der die Auswirkungen sozialpolitischer Zielsetzungen untersucht werden sollen, wird durch die modifizierte Finanzierungsgleichung (18) [46)] repräsentiert:

$$(18)\quad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t) + \pi(t)\, G(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t)\} = \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t+1)\, v + R(t) \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t)\}\ .$$

Wir nehmen nun an, daß das einheitliche Durchschnittseinkommen aller Versicherten $G(t)$ mit der Zeit exponentiell steigt oder gleichbleibt, d.h. der Bedingung

$$(40)\quad G(t) = G(t_o) \cdot \rho^{t-t_o} \qquad \begin{matrix} t \geq t_o \\ \rho \geq 1 \end{matrix}$$

genügt.

Außerdem setzen wir voraus, daß von allen Versicherten einheitlich $s-x_o$ Zwangsbeiträge, die jeweils in Anteilen vom Einkommen erhoben werden, entrichtet worden sind.

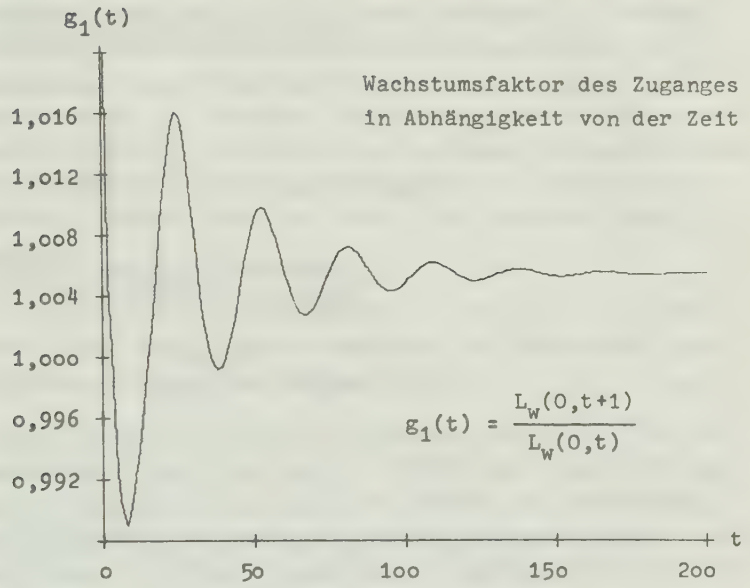
Der sozialpolitischen Forderung nach Strukturgleichheit der Einkommensverhältnisse im Beitrags- und Rentensektor ist

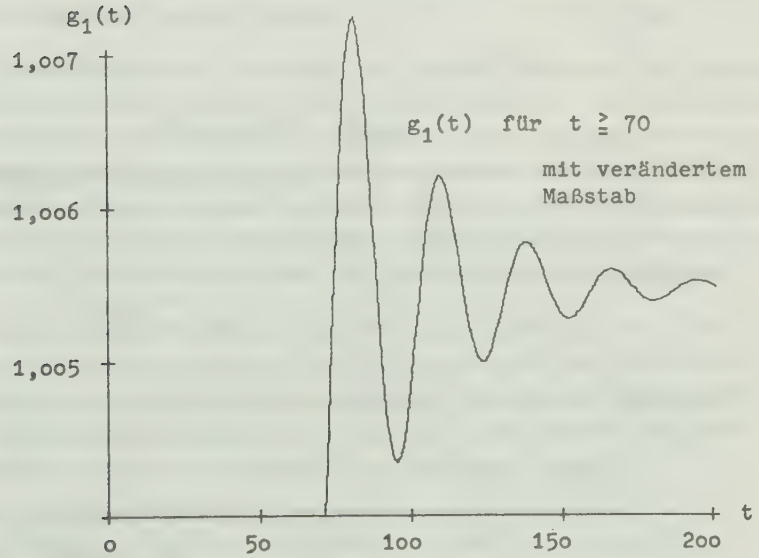
---

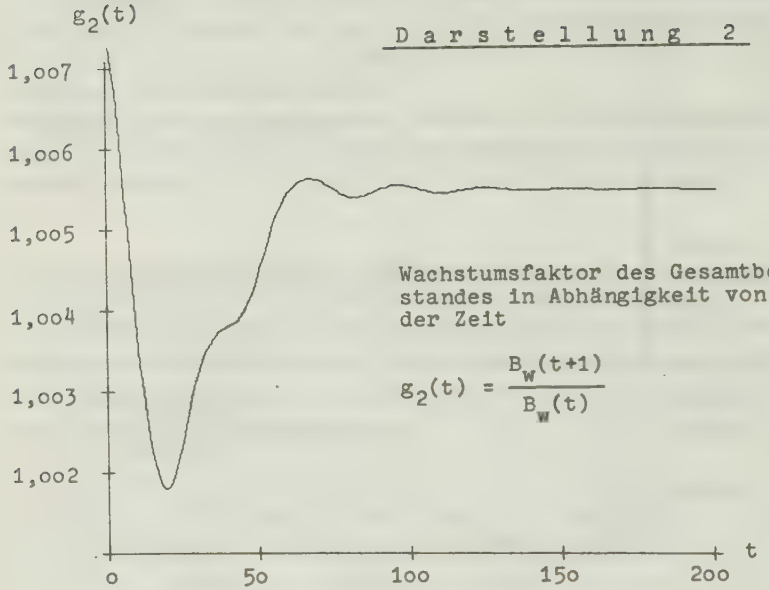
45) Errechnet aus den Werten $l(y)$, $f(y)$, die auch bei der Iteration zugrunde lagen.

46) Siehe S. 28

Darstellung 1



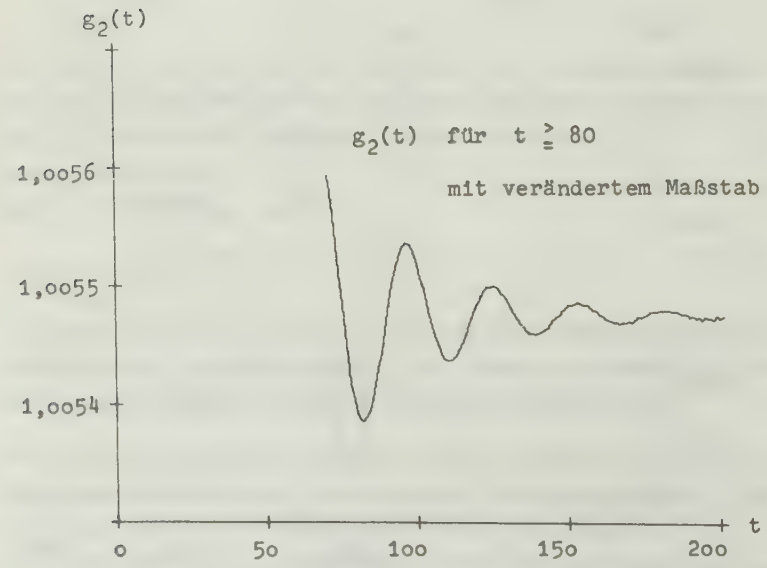




Darstellung 2

Wachstumsfaktor des Gesamtbestandes in Abhängigkeit von der Zeit

$$g_2(t) = \frac{B_w(t+1)}{B_w(t)}$$



$g_2(t)$ für $t \geq 80$

mit verändertem Maßstab

nun aber noch nicht genügt, wenn auf Grund der zeitlichen Entwicklung des Gehaltes (40) beim Eintritt in das Rentenalter eine Altersrente nach der Rentenformel (15) [47] festgelegt wird. Zwar bleibt dann die Einkommensstruktur innerhalb der gleichzeitig aus dem Erwerbsleben Ausscheidenden erhalten, jedoch wird bei weiterer Progression der Aktivengehälter der Unterschied des durchschnittlichen Aktiveneinkommens R(t) zur einmal festgesetzten Rente wachsen.

Eine generelle Strukturgleichheit wäre nur gegeben, wenn alle einmal festgesetzten Renten an die Entwicklung der Aktiveneinkommen angeschlossen würden.

In der deutschen Sozialen Rentenversicherung hat nun der Gesetzgeber jedes Jahr neu zu entscheiden, ob und in welchem Maße die bereits laufenden Renten der Entwicklung der Allgemeinen Bemessungsgrundlage angepaßt werden sollen[48]. Das hieße für unser Modell, daß als extreme Fälle einmal die volle Angleichung an die Entwicklung der Aktiveneinkommen und zum anderen die Konstanz der einmal berechneten Neurenten auftreten können.

In Anbetracht der Tatsache, daß in der Praxis in den Jahren nach der Rentenreform stets in voller Höhe - wenn auch mit einjähriger Verzögerung - angepaßt wurde, werden wir in unserem Modell den Fall der Nichtanpassung erwähnen, weitergehende Betrachtungen bezüglich finanzieller Entwicklungen jedoch auf die unverzügliche, volle Anpassung der Bestandsrenten an die Entwicklung der Aktiveneinkommen aufbauen.

Zusammenfassend wollen wir noch einmal feststellen: Die allgemeine Gehaltsentwicklung bis zum Ausscheiden aus dem Erwerbsleben wird grundsätzlich durch die Rentenformel berücksichtigt, während die Anpassungen der danach folgenden Entwicklung der Aktivengehälter Rechnung tragen.

---

47) Siehe S. 24

48) § 1272 Abs.1 und 2 RVO

Betrachten wir nun die zum Zeitpunkt $t = j$ als s-jährige erstmals Altersrente Beziehenden. Für sie soll gelten

$$R(j) = p \cdot G(j). \tag{41}$$

Der Parameter p ist dabei ausschließlich auf Grund sozialpolitischer Erwägungen festgelegt worden (speziell $p = 0{,}60$). Er wird auf die Anzahl von Jahren aufgeteilt, die der Versicherte dem System als Aktiver unter normalen Umständen (während eines normalen Arbeitslebens) im Mittel angehören wird (speziell $n = 40$). Auf ein Jahr der Zugehörigkeit entfällt also der Anteil (Rentensatz) $\varepsilon = p/n$ (speziell $\varepsilon = 0{,}015$). Die Kosten, die durch die so festgelegten Leistungen entstehen, werden mit Zwangsbeiträgen finanziert[49], wobei jedoch nicht alle Jahre der Zugehörigkeit mit Beiträgen belegt zu sein brauchen.[50] Es ist aber verständlich, daß diese nicht mit Beiträgen belegten Zugehörigkeitsjahre (Ersatz- und Ausfallzeiten) beschränkt werden müssen, um das System finanziell realisieren zu können.

Wird nun unsere oben erstmals gezahlte Altersrente entsprechend dem durchschnittlichen Aktiveneinkommen variiert, so gilt

$$\frac{R(t)}{G(t)} = p \qquad t \geq j. \tag{42}$$

Unser formales Modell ist in der Form (18) anwendbar, da alle Rentner zum Zeitpunkt t eine gleichhohe Rente beziehen.

---

49) Nach den Vorstellungen des Gesetzgebers sollen ArV und AnV die Altersrentenleistungen ausschließlich aus Beiträgen finanzieren.
RVO § 1389, AVG § 116
S.a. Regierungsentwurf, [6], Allgemeiner Teil und Begründung zu § 1382

50) Regierungsentwurf, [6], Begründung zu § 1263, anrechnungsfähige Versicherungsjahre.

Bleibt die Altersrente dagegen - bei fehlender Anpassung - in ihrer absoluten Höhe erhalten, so gilt die Beziehung (18) nicht. Da jede Rente dann in ihrer Höhe vom Zeitpunkt des Rentenbeginns abhängt, gilt die allgemeine Form

$$(43)\quad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t) + \pi(t)\, G(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t)\} =$$

$$= \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \{F(t+1)v + pG(t) \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t)\cdot \rho^{-x+s}\} .$$

Bei voller Anpassung kann für die Rente wegen (42) allgemein $R(t) = p\cdot G(t)$ eingesetzt werden. Bei fehlender Anpassung, aber Gültigkeit der exponentiellen Zunahme des durchschnittlichen Arbeitsentgeltes im Aktivensektor (40) muß für R(t) eingesetzt werden

$$(42a)\quad R(t) = p\, \frac{G(t)}{\rho^{x-s}} .$$

Die erste Rente (d.h. bei Rentenfestsetzung) entspricht wegen (41) dem durchschnittlichen Aktiveneinkommen zur gleichen Zeit. Diese einmal festgesetzte Rente hat aber in den Folgejahren keine Erhöhung mehr erfahren.

Wir können also abschließend zusammenfassen: Die sozialpolitischen Zielvorstellungen sind außer durch die Abgrenzung der Versicherungspflichtigen noch durch den Parameter p (erstrebenswertes Niveau der Neurenten), und damit auch dem Rentensatz ε, und durch das Rentenbeginnalter s repräsentiert.

Als Modellvoraussetzungen sind ferner zu betrachten: das einheitliche Eintrittsalter x_o, der Finanzierungsmodus, der hier in der anteiligen Erhebung von Beiträgen besteht, und schließlich die zeitliche Entwicklung des Einkommens G(t) (siehe Formel (40)).

Legen wir schließlich der Betrachtung noch Finanzierungsabschnitte der allgemeinen Länge $(t_1-t_o) \geq 1$ zugrunde, so erhalten wir als Ausgangsgleichung für den Fall, daß keine Anpassung der Bestandsrenten erfolgt, die Beziehung (43).

Für den Fall, daß sich die Bestandsrenten entsprechend den durchschnittlichen Aktiveneinkommen entwickeln sollen, können wir bei weiteren Betrachtungen von der Beziehung (18) ausgehen.

D Finanzierungsmöglichkeiten bei modellmäßig gegebenen sozialpolitischen Zielen

I. Finanzierungsmöglichkeiten unter allgemeinen Hypothesen

1. Frei verfügbare Größen beim einjährigen Deckungsabschnitt

Zur folgenden Diskussion verschiedener Finanzierungsmöglichkeiten - zunächst im Extremfall des einjährigen Deckungsabschnittes - müssen wir von der Beziehung

$$(44) \quad F(t) + \pi(t)\, G(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t) = p \cdot G(t) \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t) + F(t+1)v$$

ausgehen.

Es werden hier die Zinshöhe (Diskontierungsfaktor v), das nach (40) anwachsende Durchschnittseinkommen G(t), der Rentenanteil $p = R(t)/G(t)$, der Versichertenkreis $\sum_{x=x_o}^{\omega} L(x,t)$ und das Rentenbeginnalter s als bekannt vorausgesetzt. Somit bleiben als Variable die durch (44) verknüpften Größen $\pi(t)$, F(t) und F(t+1).

In der Realität werden wir jedoch weiter davon auszugehen haben, daß der Fonds F(t) (Gesamtreserve zum Zeitpunkt t) als vorgegebene Größe auftritt. Dabei kann es sein, daß der Fonds einmal als Residuum aus der vorhergehenden Finanzierungsperiode übernommen wurde. Er kann aber genauso gut

aus Staatsmitteln erhöht worden sein.

Tritt aber ein vorgegebener Fonds F(t) als Nebenbedingung auf, so bleiben als noch festzulegende Variable bei der Betrachtung eines Jahres lediglich $\pi(t) \geq 0$ und F(t+1), d.h. der Beitragssatz und der am Ende des Jahres zu erzielende Fonds. Durch Festlegung der einen Größe wird die andere eindeutig bestimmt.

D I.2 Frei verfügbare Größen beim mehrjährigen Deckungsabschnitt

Für die Betrachtung des allgemeinen Falles ($t_1 - t_o > 1$) formen wir (43) unter der Voraussetzung jährlicher Anpassung der Bestandsrenten analog (5)[51] um zu

$$(45) \quad F(t_o) + \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} G(t)\, \pi(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t) = \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} pG(t) \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t) + F(t_1)\, v^{t_1-t_o}.$$

Hierbei müssen nun Annahmen über die Entwicklung der Personenbestände getroffen werden. Legt man dem Modell eine zeitlich invariante Absterbeordnung zugrunde, so ist die Entwicklung des Bestandes an Altersrentnern für jeden Zeitraum (Deckungsabschnitt) $t_1 - t_o \leq s - x_o$ aus einem zum Zeitpunkt t_o vorliegenden Bestand $B(t_o)$ eindeutig bestimmt[52], wenn als einzige Ausscheideursache der Tod in Betracht gezogen wird. Für die Personengesamtheiten im Beitragssektor hingegen müssen weitergehende Annahmen über den Zugang aus der noch nicht erwerbstätigen Bevölkerung getroffen werden, die sich für den Zeitraum $t_1 - t_o \leq x_o$ auf wirtschaftlich-soziale Tatbestände, wie z.B. Erwerbs-

---

51) Siehe S. 12

52) Entsprechendes gilt natürlich, wenn über mehrere aneinandergrenzende Deckungsabschnitte Aussagen gemacht werden sollen.

quoten und Versichertenquoten beziehen. Sobald jedoch $t_1 - t_o > x_o$, müssen zusätzlich Hypothesen über die Entwicklung der Reproduktionsverhältnisse[53] in der Bevölkerung aufgestellt werden, als deren Teil die Versichertengesamtheit aufzufassen ist.

Weiterhin sei vorausgesetzt, daß die Funktion $\sum_{x=x_o}^{\omega} L(x,t)$ in $t_o \leq t < t_1$ eindeutig bestimmt ist; dann ist in der Beziehung (45) mit Ausnahme der Größen $F(t_o)$, $\pi(t_o)$, $\pi(t_o+1)$, ..., $\pi(t_1-1)$, $F(t_1)$ alles gegeben.

Darf entsprechend der Situation beim einjährigen Deckungsabschnitt der Anfangsfonds $F(t_o)$ als bekannt vorausgesetzt werden, so enthält die Gleichung (45) nur die frei verfügbaren Größen

$$\pi(t_o),\ \pi(t_o+1),\ \ldots,\ \pi(t_1-1),\ F(t_1).$$

Es gibt somit für (45) t_1-t_o mögliche Lösungen. Verfügt man über jeweils t_1-t_o der t_1-t_o+1 Parameter, so ist der letzte damit bestimmt.

Würde man dagegen zur Lösung des allgemeinen Falles, in der die vollständige laufende Anpassung der Bestandsrenten vorausgesetzt ist, von der Beziehung (18) ausgehen, so könnte man von den hier auftretenden $2(t_1-t_o)$ Parametern

$$\pi(t_o),\ F(t_o+1),\ \pi(t_o+1),\ F(t_o+2),\ \ldots,\ \pi(t_1-1),\ F(t_1)$$

zwar über (t_1-t_o) Parameter verfügen, jedoch ergibt nicht jede beliebige Kombination dieser Größen eine sinnvolle Lösung.

D I.3 Ausgaben und Einnahmen der Folgezeit (ausgehend von t_o)

Bei den im folgenden zu diskutierenden speziellen Finanzierungsansätzen seien die Ausgaben auf Grund der in B.II ausgeführten sozialpolitischen Zielvorstellungen gegeben. Ist $L(x,t_o)$, $x_o \leq x \leq \omega$ der Anfangsbestand, scheiden Ver-

---

53) D.h. die altersspezifischen Fruchtbarkeitsziffern. Siehe C II.2

sicherte lediglich nach der zeitlich invarianten Abgangsordnung l(x) aus und entwickelt sich das Durchschnittseinkommen exponentiell nach (4o), so ist die gesamte im Zeitraum $t_o \leq t \leq t_o + s-x_o$ fällige Belastung (bezogen auf t_o) bestimmbar, ohne daß weitere Hypothesen über irgendwelche Einflußgrößen gemacht werden müßten.
Wenn man noch berücksichtigt, daß

$$(46) \qquad L(x+t-t_o,t) = L(x,t_o)\,\frac{l(x+t-t_o)}{l(x)}$$

so erhält man im Falle rechnungsmäßigen Verlaufes für die gesamte auf t_o bezogene Belastung während des Zeitraumes $t_o \leq t \leq t_o + s-x_o$

$$(47) \qquad T_o = p \sum_{t=t_o}^{t_o+s-x} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{t-t_o} \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t_o)\,\frac{l(x+t-t_o)}{l(x)}\,\rho^{s-x}.$$

Nimmt man schließlich noch Vollanpassung der Bestandsrenten an, so erhält man für die auf den Zeitpunkt t_o bezogene, eindeutig festlegbare Gesamtbelastung

$$(47a) \qquad T_o = p \sum_{t=t_o}^{t_o+s-x} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{t-t_o} \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t_o)\,\frac{l(x+t-t_o)}{l(x)}$$

da die Gewichte ρ^{s-x} identisch gleich 1 werden.

Man sieht also deutlich, wie das Rentensystem auf der Ausgaben-(Renten)Seite durch die rechtliche Kodifizierung von Ansprüchen festgelegt ist.[54] Diese Ansprüche genießen sogar nach der Rechtsprechung des Bundessozialgerichtes und der neueren Rechtsprechung des Bundesverfassungsgerichts[55]

---

54) In der Sozialenquête, [26], heißt es z.B. im Gliederungspunkt 410: Der gesamte Block der Sozialausgaben (ist) nach unten weitgehend unelastisch ... Teils ergibt sich diese Unelastizität aus dem Bestehen von Rechtsansprüchen, teils aus der politischen Pression gegen Ausgabesenkungen, die hier ... wegen des Bedürfnisses nach Sicherheit begreiflich ist.

55) S. Sozialenquête [26]: Gliederungspunkt 125

eine Art Eigentumsschutz gemäß Art. 14 Grundgesetz. Daher sind dem Gesetzgeber bei einer neuerlichen Reformierung des Rechtes auf diesem Gebiete enge Grenzen gesetzt, soweit er die erwähnten Rentenansprüche kürzen wollte. Eine Reduzierung der Ansprüche könnte demnach immer erst $s-x_o$ Jahre nach ihrem Infrafttreten finanzielle Auswirkungen zeigen, da die "privilegierten" Aktiven si ; dann bereits alle im Rentensektor befinden.

Zu sehr viel weniger genauen Aussagen - oder besser, zu Aussagen nur unter zusätzlichen einschneidenden Hypothesen - gelangt man auf der Einnahmenseite. Da die Beiträge in Anteilen $\pi(t)$ vom jeweiligen durchschnittlichen Bruttoarbeitsentgelt $G(t)$ erhoben werden sollen, hängen die gesamten Beitragseinnahmen - zunächst pro Kalenderjahr - ab von der Zahl der Beitragszahler, dem Anteil $\pi(t)$ und der zeitlichen Entwicklung der Bruttoarbeitsentgelte, für die in unserem Modell die exponentielle Progression (4o) angenommen wurde.

Wir gehen nun wieder von einem festen Zeitpunkt t_o aus. Die aktiv Versicherten zu diesem Zeitpunkt seien gegeben mit $L(x,t_o)$, $x_o \leq x < s$. Definitionsgemäß sind sie Erwerbspersonen. Analog zur amtlichen Statistik wollen wir diese Erwerbspersonen[56] $L(x,t_o)$ mit Hilfe von Anteilssätzen (Gliederungszahlen) $0 < a(x,t_o) \leq 1$ aufteilen in erwerbstätige Versicherte $L(x,t_o)\ a(x,t_o)$ und erwerbslose Versicherte[57] $L(x,t_o)(1 - a(x,t_o))$.

---

56) Erwerbspersonen = Erwerbstätige + Erwerbslose. S. z.B. Statistisches Jahrbuch 1966, [3o], S. 147

57) Der hier gebrauchte Begriff des aktiv Versicherten deckt sich nicht mit dem Begriff des Versicherten im Gesetz. Es wird hier stets von der finanziellen Seite ausgegangen. Auch der nicht beitragszahlende Arbeitslose ist im Modell aktiv Versicherter, da die Zeit der Arbeitslosigkeit als Ausfallzeit (§§ 1258, 1259 RVO) u.U. rentensteigernd wirkt. Nach dem Gesetz ruht jedoch für die Zeit der Arbeitslosigkeit das Versicherungsverhältnis.

Würde die Rentenversicherung - wie in unserem Modell vorausgesetzt - ausschließlich aus Beiträgen der Versicherten finanziert, so bestünde zunächst die Möglichkeit, die Erwerbstätigen die gesamte Finanzierungslast tragen zu lassen und damit die Beitragshöhe je nach der wirtschaftlichen Gesamtsituation zu variieren. Um diese sozialpolitisch unerwünschte Auswirkung zu vermeiden, schlug die Sozialenquête-Kommission 1966 vor, diejenigen Stellen zur Beitragszahlung zu verpflichten, die entweder "für das Entstehen der Anrechnungszeiten verantwortlich sind oder währenddessen für den Unterhalt aufkommen".[58] In unserem Falle bestünde also die sozialpolitisch erwünschte Regelung darin, daß der Bundesanstalt für Arbeitsvermittlung und Arbeitslosenversicherung die Beiträge für arbeitslose Mitglieder angelastet würden. Schlagen wir in unserem Modell diesen Weg ein, so interessieren die Anteilssätze $a(x,t_o)$ - und damit allgemein auch $a(x,t)$ - nur im Zusammenhange mit der Aufteilung des Beitragsaufkommens auf die Versichertengemeinschaft und andere Stellen, die bei unseren Erwägungen jedoch außer acht gelassen werden soll.

Weitere Probleme auf der Einnahmeseite entstehen durch die Aufteilung der Versicherten x-Jährigen ($x_o \leq x < s$) in Aktive und Invalide.

Im Rentensektor gibt es in diesem Zusammenhange keine Schwierigkeiten, da gezahlte Invalidenrenten bei Erreichen der Altersgrenze s grundsätzlich in Altersrenten umgewandelt werden[59], sofern gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. (Diese Voraussetzungen betreffen im wesentlichen die Wartezeit, auf die hier jedoch nicht eingegangen wird.)

Problematischer würde hingegen die Bestandsentwicklung auf der Beitragsseite, wenn neben den Abgangswahrscheinlichkeiten auf Grund der Sterbetafel auch noch Invalidisierungswahrscheinlichkeiten auf die Bestände einwirken würden.

---

58) Sozialenquête, [26], Gliederungspunkt 553

59) § 1254 Abs.2 RVO

In die Invalidisierungswahrscheinlichkeit gehen hauptsächlich zwei Komponenten ein. Einmal die Wahrscheinlichkeit, invalid zu werden, und zum anderen die Wahrscheinlichkeit, den Anspruch auf Invalidenrente auch geltend zu machen.

Handelt es sich schon bei der Invalidisierung nicht um ein objektives Ereignis wie z.B. den Tod oder das Erreichen des Pensionsalters, und ist es somit - in gewissen Grenzen - manipulierbar, so spiegelt sich in der zweiten Komponente der gesamtwirtschaftliche Zustand wider. "In guten wirtschaftlichen Zeiten wird das Angebot an Arbeitsplätzen denjenigen Versicherten, die an sich physisch schon in der Lage wären, eine Rente mit Erfolg zu beantragen, eher ermöglichen, ihren Arbeitsplatz zu behalten als in Zeiten einer wirtschaftlichen Depression. Umgekehrt ist das Ausweichen auf andere Arbeitsplätze in Zeiten zunehmender Arbeitslosigkeit stark eingeschränkt und muß daher zu vermehrten Rentenzugängen führen."[60] Die starke Konjunkturabhängigkeit der Invalidisierungswahrscheinlichkeit gilt dabei für jedes Alter in nahezu völlig gleichem Maße.[61]

Diese Invalidisierungswahrscheinlichkeiten hätten also für Prognosezwecke eine recht geringe Aussagekraft und würden zudem andererseits unseren Formelapparat so komplizieren, daß relativ einfache Abschätzungen der Belastung unter verschiedenen Voraussetzungen nicht mehr möglich sind. Wir wollen daher in unserem Modell analog dem oben Gesagten voraussetzen, daß der Versicherungsanstalt die Einnahmeausfälle aus Frühinvalidität eines Teils ihrer Mitglieder im Alter $x_o \leq x < s$ ersetzt werden. Mit Hilfe dieser Annahme können wir - was im folgenden noch zu zeigen ist - in unserem Modell Beitragssätze wieder mit dem üblichen Verfahren der Lebensversicherungsmathematik angeben.

Diese so bestimmten Beiträge sind als Minimalprämien anzusehen, die sich erhöhen, wenn von der Voraussetzung abge-

---

60) S. Löwe [18], S. 3; s. hierzu auch Heubeck [12], S.133

61) S. hierzu Heubeck und Fischer, [11], Hauptband S. XIII

gangen wird, daß dem Versicherer durch Frühinvalidität ausfallende Beitragseinnahmen erstattet werden. Die Aktiven hätten dann noch einen weiteren Prämienanteil zu entrichten, der als Prämie für eine Invalidenzusatzversicherung zu deuten wäre.

D.II Spezielle Finanzierungsansätze bei idealen Gesamtheiten

1. Ideale Gesamtheit (Zeitpunktgesamtheit idealer Struktur)

Eine entscheidende Vereinfachung für die Untersuchung unseres Modellversorgungssystems betrifft die Struktur von Zeitpunktgesamtheiten, wie sie etwa durch unseren Ausgangsbestand $L(x,t_o)$, $0 \leq x \leq \omega$ dargestellt werden. Legen wir bei diesen Zeitpunktgesamtheiten eine gewisse ideale Struktur zugrunde, so gestattet uns das unter anderem, Belastungsveränderungen unter verschiedenen Entwicklungshypothesen anhand relativ einfacher Formelausdrücke abzuschätzen, ohne spezielle Bestände selbst ausführlich durchrechnen zu müssen. Eine solche ideale Struktur ist zunächst die schon früher (A II.4, S.13) verwendete natürliche Gesamtheit

$$(6) \qquad L(x,t) = c \cdot l(x) = L(x) \qquad 0 \leq x \leq \omega \ ,$$

deren Altersstruktur also mit der Ausscheideordnung $l(x)$ übereinstimmt.

Ziehen wir weiter die Ergebnisse unserer Erwägungen über die zeitliche Entwicklung von Personengesamtheiten heran, so erhalten wir bei Verwendung von (23) und (24) für unsere Zeitpunktgesamtheit

$$(48) \qquad B(t) = \frac{L \cdot \lambda^{t-t_o}}{l(o)} \sum_{x=o}^{\omega} l(x)\ \lambda^{-x} \ .$$

Die Struktur dieser Gesamtheit bezeichnen wir als ideal, da sie nur von der Sterbetafel und einem einzigen Wachstums-

parameter λ in sehr einfacher Weise abhängt. Je nachdem, ob $\lambda = 1$ bzw. $\lambda \neq 1$, erhalten wir den absoluten bzw. relativen Beharrungszustand.[62)]

Mit solchen idealen Gesamtheiten im absoluten Beharrungszustand arbeiten z.B. Kaiser und Nonella[63)] bei ihrer Untersuchung wirtschaftlicher Einflüsse auf Finanzierungssysteme der sozialen Rentenversicherung sowie Ammeter[64)], der auf die Wichtigkeit "geordneten Vorausparens" im Zusammenhang mit der Finanzierung hinweist.

Gesamtheiten im relativen Beharrungszustand hingegen liegen den Arbeiten von Thullen[65)], der die Variation der Deckungskapitalien bei speziellen Finanzierungsverfahren aufzeigt, sowie von Heubeck[66)], der für gewisse Finanzierungsverfahren Beiträge in Abhängigkeit vom Zugang ermittelt.

D II.2 Entwicklung der Finanzierungsgleichung

Wir wollen nun auf der linken Seite der Beziehung (45) die Summe der auf t_o bezogenen Beiträge betrachten und hierbei eine Versichertengesamtheit idealer Struktur nach (48) und eine Entwicklung der Einkommen nach (40) zugrunde legen. Die gesamten Einnahmen des Finanzierungsabschnittes $t_o \leq t < t_1$ ergeben dann auf t_o bezogen den Ausdruck

$$(49) \quad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} G(t)\, \pi(t) \sum_{x=x_o}^{s-1} L(x,t) =$$

$$= G(t_o)\, \frac{L}{l(o)} \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) \cdot \lambda^{-x} \sum_{t=t_o}^{t_1-1} \pi(t) \left(\frac{\rho \cdot \lambda}{r}\right)^{t-t_o}.$$

---

62) Siehe S. 29/30

63) Kaiser, Nonella, [16], S. 484

64) Ammeter [2], S. 85 ff.

65) Thullen [32]

66) Heubeck [13]

Für spätere Betrachtungen wollen wir noch den konstanten Faktor L/l(o) bezeichnen mit

$$(50) \qquad \frac{L}{l(o)} = c_o .$$

Unter den gleichen Hypothesen hinsichtlich der Struktur und der Entgeltsentwicklung erhalten wir auf der rechten Seite der Beziehung (45) für die Summe der in $t_o \leq t < t_1$ vom Versicherungssystem zu erbringenden Rentenleistungen - gleichfalls auf t_o bezogen -

$$(51) \qquad \sum_{t=t_o}^{t_1-1} v^{t-t_o} \, p \cdot G(t) \sum_{x=s}^{\omega} L(x,t) =$$

$$= p \cdot G(t_o) c_o \, s\ddot{a}^{(1)}_{\overline{t_1-t_o}|} \sum_{x=s}^{\omega} l(x) \, \lambda^{-x} . \qquad 67)$$

In der vorliegenden Arbeit wurde bisher bei den sozialpolitischen Zielen der Rentensektor besonders berücksichtigt, und zwar gemäß der Tatsache, daß auch im Zusammenhang mit der Rentenreform zum weitaus überwiegenden Teil Probleme der Leistungsseite diskutiert worden waren.

Bei der Betrachtung der Ausgaben, die uns für bestimmte Finanzierungsabschnitte zu der Beziehung (49) führte, können wir aber auch im Zusammenhang mit dem Beitragssatz noch eine sozialpolitisch sehr sinnvolle Forderung stellen. Diese Forderung besagt, daß die bereits festgelegten Leistun-

---

67) $s\ddot{a}^{(1)}_{\overline{t_1-t_o}|}$ ist der Zeitrentenendwert unter Verwendung des Aufzinsungsfaktors $r^{(1)} = \frac{\rho \cdot \lambda}{r}$. Voraussetzung ist also $\rho \cdot \lambda > r$. Für $\rho \cdot \lambda < r$ ergibt sich:

$$\sum_{t=t_o}^{t_1-1} \left(\frac{\rho \cdot \lambda}{r}\right)^{t-t_o} = \ddot{a}^{(1)}_{\overline{t_1-t_o}|} \qquad \text{mit} \quad r^{(1)} = \frac{r}{\rho \cdot \lambda} .$$

gen unter sozial gleichen Verhältnissen bei den späteren Leistungsempfängern gleiche Gegenleistungen während deren Aktivenzeit auslösen sollten. Das hieße in unserem System, daß für die Dauer gleicher sozialpolitischer Zielvorstellungen der Teil des Einkommens, der als Zwangsbeitrag an die Rentenversicherung abzuführen ist, keinen zeitlichen Schwankungen unterliegt. Da wir nun weiter bei unseren Belastungsabschätzungen von einer bestimmten Kombination sozialpolitischer Ziele ausgehen können, heißt das, daß der Beitragssatz als Konstante in unser System eingeht.

Diese Forderung, daß gleiche Beiträge gleiche Leistungen zur Folge haben sollten, ist einmal in einem relativ frühen Stadium der Diskussion um die Sozialreform von Schellenberg[68] erhoben worden. In der späteren Fassung des Rentenversicherungsgesetzes hat man sich nur zu einer zehnjährigen Konstanz der Beiträge (entsprechend der Länge des Deckungsabschnittes) entschließen können[69], jedoch nicht aus Gründen sozialer Gerechtigkeit, sondern aus Gründen der verwaltungstechnischen Vereinfachung, die eine längerfristige Beitragskonstanz zwangsläufig mit sich bringt. Berücksichtigen wir die Beitragskonstanz in unserer Finanzierungsgleichung (43), und setzen wir gleichzeitig die Ausdrücke (49) und (51) hier ein, so erhalten wir die speziellere Form

$$(52) \qquad F(t_o) + \pi \cdot G(t_o) c_o \, s^{(1)}_{\overline{t_1 - t_o}|} \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) \, \lambda^{-x} =$$

$$= p \cdot G(t_o) c_o \, s^{(1)}_{\overline{t_1 - t_o}|} \sum_{x=s}^{\omega} l(x) \, \lambda^{-x} + F(t_1) \, v^{t_1 - t_o}.$$

68) Schellenberg [21]

69) RVO § 1383

D II.3 Die Modellkasse des Abschnittes A II.4 als Spezialfall (absoluter Beharrungszustand)

a. Zusammenhang mit dem allgemeinen Modell

Wie man leicht sieht, ist in der letzten Beziehung unsere Modellpensionskasse des Abschnittes A II.4 enthalten.

Dort war die stationäre Bevölkerung (Bevölkerung im absoluten Beharrungszustand) vorausgesetzt, d.h. $\lambda = 1$. Eine Dynamik in der Gehaltsentwicklung wurde nicht berücksichtigt, d.h. $\rho = 1$, und für die Bestände wurden zur Berechnung der Reserven gesetzt: $c = 1$.

Setzen wir in unserer Beziehung (52) gleichfalls $\rho = \lambda = 1$, berücksichtigen, daß speziell $c_o = c$ und normieren die Beziehung hinsichtlich der Gehaltshöhe, so erhalten wir

$$(53) \qquad \frac{F(t_o)}{G(t_o)} + \pi \, \ddot{a}_{\overline{t_1-t_o}|} \, c_o \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) =$$

$$= p \cdot \ddot{a}_{\overline{t_1-t_o}|} \, c_o \sum_{x=s}^{\omega} l(x) + \frac{F(t_1)}{G(t_o)} \, v^{t_1-t_o}. \qquad 70)$$

Das entspricht unter der Voraussetzung, daß die Reserve zeitlich invariant sein soll, genau unserer Beziehung (5 b) [71] für den Fall der Vollrente ($p = 1$) und $c = 1$.

Vergegenwärtigen wir uns kurz noch einmal, inwieweit über die Größen dieser letzten Beziehung (53) bereits verfügt worden ist. Die Zeitrentenbarwerte enthalten den jeweiligen Rechnungszinsfuß, der etwa als Kapitalmarktzinsfuß angesehen werden kann, und auch für die Überlassung von Kapital

---

70) $$\ddot{a}_{\overline{t_1-t_o}|} = \sum_{t=t_o}^{t_1-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{t-t_o}$$

71) Siehe S.15

Tabelle 3

Erwerbsquoten [72)]

Von jeweils 100 Männern der folgenden Altersgruppen waren erwerbstätig:

Alter	1957	1960	1963	1965
$15 \leq x < 20$	80,7	77,1	69,2	68,2
$20 \leq x < 25$	92,3	91,1	89,7	86,6
$25 \leq x < 30$	96,5	96,0	95,3	94,0
$30 \leq x < 35$	97,4	98,2	98,4	98,3
$35 \leq x < 40$	97,6	97,7	98,4	98,6
$40 \leq x < 45$	96,9	97,0	97,5	97,7
$45 \leq x < 50$	96,3	96,1	96,7	96,8
$50 \leq x < 55$	94,7	94,1	94,9	94,6
$55 \leq x < 60$	89,1	89,0	90,3	90,5
$60 \leq x < 65$	74,7	72,5	77,9	78,1

seitens der Rentenversicherungsträger erzielt wird. Dieser Zins kann durch die Rentenversicherungsträger in seiner Höhe nicht beeinflußt werden; in unserer Betrachtung wird er als langfristig konstant angesehen.

Die Größen $l(x)$, c_o sind vorgegeben durch die Hypothese, daß die Versichertengesamtheit - als Teil einer natürlichen Gesamtbevölkerung - sich im absoluten Beharrungszustand befinde und der schutzbedürftige Teil der Bevölkerung fest abgegrenzt sei. Weiterhin ist auf Grund sozialpolitischer Ziele über das Rentenbeginnalter s verfügt worden. Das (im Modell einheitlich angenommene) Zugangsalter x_o entzieht sich dagegen der Beeinflussung durch Sozialpolitik und Ren-

72) Quellen: Statistische Jahrbücher für die BRD 1961, 1962, 1965 und 1966

tenversicherungsträger. Als Folge einer sich technisch stets weiter entwickelnden Wirtschaft wird der Eintritt in das Erwerbsleben mit immer höherem Alter erfolgen und damit auch das x_o (im Zusammenhang mit den Beitragszahlungen) vorerst weiter ansteigen. Längere Schul- und Ausbildungszeiten verzögern den Zeitpunkt des Zahlungsbeginnes. Recht deutlich läßt sich diese Tendenz an den Erwerbsquoten ablesen (Tabelle 3).

Steigt nun das Eintrittsalter, so besteht als Folge grundsätzlich die Möglichkeit, eine niedrigere Rente zu zahlen, da unser Rentenanteil p festgelegt war durch $p = (s - x_o)\varepsilon$.

Will man aber das sozialpolitisch begründete p nicht variieren und auch das ε nicht ändern, so müssen die anfallenden längeren Ausbildungszeiten zu anrechnungsfähigen Versicherungsjahren erklärt werden, was auch in § 1259 RVO getan wird.

Somit ändert sich auf der Rentenseite nichts, da hier das ursprüngliche p erhalten bleibt. Hingegen muß der Beitrag erneut festgesetzt werden, wenn die Ausfälle, die der Rentenversicherung entstehen, nicht durch Zuschüsse ausgeglichen werden. Ein Beispiel für den Einfluß einer Variation von x_o ($x_o = 20{,}25$) bei verschiedenen Bevölkerungsstrukturen ist in Tabelle 1 enthalten.

D II.3b Die Prämie im allgemeinen statischen System

Im Modell wollen wir bei der Kalkulation von Beiträgen davon ausgehen, daß ein x_o so festgelegt ist, daß es in der Folgezeit nicht wesentlich überschritten wird und bei geringeren Überschreitungen der Beitragsausfall durch Staatszuschüsse ausgeglichen wird.

Geht man weiter davon aus, daß der Fonds $F(t_o)$ als konkrete Nebenbedingung auftritt, so stehen als Aktionsparameter lediglich noch π und $F(t_1)$ zur Verfügung, die beide in den Grenzen

(54) $V_o \cdot G(t) \geq F(t) \geq 0$ (V_o definiert in (10), Seite 14)

$0 < \pi \leq \pi max$

abhängig voneinander variieren können.

π max ist dabei als der Teil des Bruttoeinkommens anzusehen, der maximal für die Finanzierung des Altersrentensystems herangezogen werden könnte. Damit ist diese "Maximalprämie" eine Größe, die nicht isoliert gesehen werden kann, sondern als Beitrag zu einem Zwangssystem, der mit weiteren Zwangsbeiträgen zu Systemen der Sozialen Sicherheit (Beispiel Krankenkasse) sowie Steuern und Abgaben an den Fiskus als zwangsweise Einkommensverwendung konkurriert.
Wesentlich ist darum stets das verfügbare Einkommen im Verhältnis zum Bruttoeinkommen.[73)]

Nehmen wir nun an, die als Nebenbedingung vorgegebene Reserve $F(t_o)$ sei in ihrer Höhe durch das Versicherungssystem technisch bedingt und solle im Zeitablauf nicht unterschritten werden, also $F(t_1) \geq F(t_o)$. Wenn nun weiter $F(t_o)$ ausreichend ist, um die Funktionsfähigkeit des Systems sicherzustellen, so wird man aus Gründen, die innerhalb der Versicherung liegen (d.h. keine konjunkturellen oder andere gesamtwirtschaftliche Gründe), keinen Reserveaufbau vornehmen, sondern zeitliche Invarianz der Reserve fordern und die Prämienhöhe nach dieser weiteren Nebenbedingung bestimmen. Wir erhalten somit aus (52) die Prämienhöhe

$$(55) \qquad \pi = p \frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} - \frac{F(t_o)(1 - v^{t_1 - t_o})}{G(t_o)\, \ddot{a}_{\overline{t_1 - t_o}|}\, c_o \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)}$$

Das ganze System ist damit aber zeitlich invariant (statisch).

---

73) S.a. Sozialenquête, [26], Gliederungspunkt 483

Benutzen wir die Beziehung $\ddot{a}_{\overline{t_1-t_o}|} = \frac{1-v^{t_1-t_o}}{d}$ und bezeichnen allgemein in (44)

$$\text{(55a)} \qquad \frac{F(t_o)}{G(t_o)} = V_{t_o} \cdot p ,$$

so erhalten wir die Prämie

$$\text{(56)} \qquad \pi = p \left[\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} - \frac{V_{t_o} \cdot d}{c_o \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} \right]$$

d.h. die Umlageprämie, die sich je nach der vorhandenen technisch notwendigen und zinstragenden Reserve V_{t_o} ermäßigt. Ist die vorhandene Reserve maximal, also ausreichend, um nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren zu finanzieren (diese Reserve wurde oben mit V_o bezeichnet), so ergibt sich die minimale Prämie.

Prämie und gesamte Anwartschaftsdeckungsreserve $V_{t_o} = V_o$ sind für $p = 1$, für verschiedene Bevölkerungsstrukturen (Sterbetafeln) und für verschiedene Grenzalter bei $i = 0{,}03$ der Tabelle 1 (Seite 16) zu entnehmen. Für jedes $p < 1$ sind die Tabellenwerte mit dem entsprechenden p zu multiplizieren.

D II.4 Berücksichtigung der Dynamik

a. für den absoluten Beharrungszustand

In unseren bisher durchgeführten Betrachtungen wurden für die Prämie nur in einem speziellen Falle explizite Ausdrükke angegeben, und zwar in den Beziehungen (55) und (56).

In diesen Beziehungen, die vor allem eine numerische Verbindung zu unserer im Anfang zitierten Modellpensionskasse herstellen sollten, war eine zeitliche Entwicklung von Leistung und Gegenleistung nicht enthalten.

Da eine Anpassung der Rentenleistungen an zeitlich variierende Aktiveneinkommen (Rentendynamik) aber vom Gesetzgeber mit den Rentenversicherungsneuregelungsgesetzen letztlich bezweckt wurde, wollen wir diese zeitliche Entwicklung bei der nun folgenden Bestimmung einzelner Finanzierungsgrößen berücksichtigen. Als Ausgangsbeziehung dient uns die Beziehung (52) $(r > 1, \quad \rho > 1)$, wobei wir uns zunächst auf den absoluten Beharrungszustand beschränken wollen, also $\lambda = 1$ setzen.

Wir treffen nun wieder die Annahme, daß die vorhandene Reserve $F(t_o)$ - oder normiert gemäß (55a) $V_{t_o} = F(t_o)/p \cdot G(t_o)$ - zugleich die benötigte Reserve ist, die im Zeitablauf nicht unterschritten werden soll.

Unter Berücksichtigung der steigenden Aktiveneinkommen, der die zeitliche Entwicklung der Altersrenten folgt, muß nun aber für die benötigte Reserve stets

$$F(t_1) > F(t_o)$$

gelten.

Es wäre also hier die Prämie so festzulegen, daß die Reserve $F(t_1)$ im Zeitpunkt t_1 die gleiche "Effizienz" hat wie $F(t_o)$ im Zeitpunkt t_o.

D II. 4a.α Dynamik bei konstantem Kapitalisierungsgrad

α_1) Definition des Kapitalisierungsgrades

Die "Effizienz" soll durch einen hier zu definierenden Kapitalisierungsgrad, wie er in ähnlicher Form bei Kaiser[74] und Wünsche[75] auftritt, gemessen werden.

Kaiser bzw. Wünsche gehen von einer Systematik der Versichertengesamtheiten im stetigen bzw. diskreten Falle aus, die sie im wesentlichen durch zwei Parameter begründen. In Abhängigkeit von diesen Parametern werden Finanzierungssysteme erklärt, aus denen wiederum ein Kapitalisierungs-

74) Kaiser [17], S. 132
75) Wünsche [36], S. 508

grad definiert wird. Wir wollen bei unseren Betrachtungen einen anderen Weg gehen, indem wir zunächst einen Kapitalisierungsgrad definieren und mit dessen Hilfe Finanzierungssysteme beschreiben, ohne im einzelnen von einer Systematik der Gesamtheiten abhängig zu sein.

Es sei der Kapitalisierungsgrad $\kappa(t)$ als das Verhältnis

$$\frac{\text{vorhandene Reserve in } t}{\text{maximale Reserve in } t}$$

definiert, wobei die vorhandene Reserve durch $F(t)$ dargestellt wird, während wir als maximale Reserve $\max F(t)$ die für die Finanzierung nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren benötigte Gesamtreserve betrachten.

Im absoluten Beharrungszustand ist daher

$$\max F(t) = c_o \sum_{m=o}^{\omega-x_o} l(x_o+m)\, G(t)\, p\, {}_mV_{x_o}\,, \tag{57}$$

wobei ${}_mV_{x_o}$ das in (8) definierte Deckungskapital bedeutet. Benutzen wir weiter die Definition (9) für V_o, so können wir die Maximalreserve (57) umformen zu

$$\begin{aligned}\max F(t) &= V_o \cdot c_o \cdot p \cdot G(t) \\ &= V(r) \cdot c_o \cdot p \cdot G(t)\,.\end{aligned} \tag{58}$$

Durch die Benennung $V_o = V(r)$ soll angedeutet werden, daß wir die Abhängigkeit der Gesamtreserve (9) vom Zins im folgenden besonders berücksichtigen wollen.

Für die effektiv vorhandene Reserve im Zeitpunkt t, die - unter sonst gleichen Modellannahmen - als gegebene Größe vorausgesetzt wird, gilt $F(t) \leq \max F(t)$. Der Kapitalisierungsgrad ist dann nach der oben getroffenen Definition

$$\kappa(t) = \frac{F(t)}{c_o \cdot p \cdot G(t) \cdot V(r)} \qquad \text{mit } 0 \leq \kappa(t) \leq 1. \tag{59}$$

Ganz analog definieren wir im folgenden für den Fall des

relativen Beharrungszustandes (stabile Gesamtheit) den Kapitalisierungsgrad. Wenn hierbei unter der Maximalreserve die Reserve verstanden wird, die bei erreichtem Stand der Dynamik (Vollanpassung der Bestandsrenten bis zum Zeitpunkt t eingeschlossen) eine Abfindung sämtlicher Ansprüche mit dem individuellen versicherungsmathematischen Deckungskapital[76] gestattet, so erhalten wir für diese Maximalreserve[77]:

$$(60) \qquad \max F(t) = c_o \cdot \lambda^{t-t_o} \sum_{m=o}^{\omega-x_o} l(x_o+m)\, \lambda^{-(x_o+m)}\, G(t) \cdot p \cdot {}_mV_{x_o}.$$

In diesem Zusammenhang bezeichnen wir

$$(61) \qquad V(\lambda,r) = \sum_{m=o}^{\omega-x_o} l(x_o+m)\, \lambda^{-(x_o+m)}\, {}_mV_{x_o}.$$

Wir beziehen wieder die effektiv vorhandene Gesamtreserve F(t) auf die Maximalreserve max F(t) und erhalten für den Kapitalisierungsgrad $\kappa(t)$ bei stabiler Gesamtheit sowie Lohn- und Rentendynamik

$$(62) \qquad \kappa(t) = \frac{F(t)}{c_o \cdot p \cdot G(t) \cdot \lambda^{t-t_o} \cdot V(\lambda,r)}.$$

D II.4a α_2 Finanzierung bei konstantem Kapitalisierungsgrad

Wird nun - zunächst für die Gesamtheit im absoluten Beharrungszustand - gefordert, daß der Kapitalisierungsgrad des Zeitpunktes t_o auch im Zeitpunkt $t_1 > t_o$ bestehen soll, so können wir die im Zeitpunkt t_1 notwendige effektive Reserve aus der vorhandenen Reserve zum Zeitpunkt t_o bestimmen auf Grund der Forderung:

---

76) Siehe (8), S. 14

77) Auf Grund (9) und (48)

$$\kappa(t_o) \overset{!}{=} \kappa(t_1)$$

$$(63) \qquad \frac{F(t_o)}{G(t_o)\cdot p\cdot c_o\cdot V(r)} = \frac{F(t_1)}{G(t_1)p\cdot c_o\cdot V(r)} \,.$$

Berücksichtigt man die in (46) festgelegte Form der Einkommensentwicklung, so folgt für die gesuchte Reserve im Zeitpunkt t_1

$$(64) \qquad F(t_1) = F(t_o)\cdot \rho^{t_1-t_o}.$$

Diese Beziehung in (52) eingesetzt, ergibt die Bestimmungsgleichung für die Prämie im dynamischen System bei stationär natürlicher Gesamtheit unter der Bedingung konstanten Kapitalisierungsgrades

$$(65) \qquad \pi = p\,\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} + \frac{F(t_o)\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{t_1-t_o} - 1\right)}{G(t_o)\,c_o \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) \sum_{t=t_o}^{t_1-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{t-t_o}}$$

Durch einige Umformungen (unter Verwendung des Endwertes der postnumerando Zeitrente bei $\rho \geq r$ bzw. des Barwertes der pränumerando Zeitrente bei $\rho \leq r$) erhalten wir

$$(66) \qquad \pi = p\,\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} + \frac{F(t_o)}{G(t_o)\cdot c_o \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)}\left(\frac{\rho}{r} - 1\right).$$

Führen wir noch den Kapitalisierungsgrad nach (59) explizit ein, so ergibt sich schließlich

$$(67) \qquad \pi = p\left\{\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} + \kappa(t_o)\,\frac{V(r)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)}\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)\right\}$$

Diese Ergebnisse, die unabhängig von der Länge des eingangs eingeführten Deckungsabschnittes der Länge t_1-t_o sind, wollen wir noch deuten:

Für den Fall, daß die Wachstumsrate $\rho = 1 + i_\rho$ der Einkommen gleich dem Aufzinsungsfaktor $r = 1 + i$ ist, erhält man - unabhängig vom Kapitalisierungsgrad unseres Rentensystems - die Umlageprämie.

Ist die Wachstumsrate der Einkommen größer als der Aufzinsungsfaktor, so erhalten wir eine Prämie, die größer ist als die Umlageprämie, und zwar umso größer, je größer der Kapitalisierungsgrad des Systems ist, und gleichfalls umso größer, je größer die Differenz $\rho - r$ ist.

Ist die Wachstumsrate der Einkommen kleiner als der Aufzinsungsfaktor, so erhalten wir eine Prämie, die kleiner als die Umlageprämie ist; und zwar umso kleiner, je größer der Kapitalisierungsgrad ist, und gleichfalls umso kleiner, je größer die Differenz $r - \rho$ ist.[78)]

Wir sehen aber an den hier gezeigten Lösungen auch, daß eine Aussage allein über die Höhe der Prämie nur eine Teilinformation enthält, die erst durch die Angabe des jeweiligen Kapitalisierungsgrades des Rentensystems vervollständigt wird.

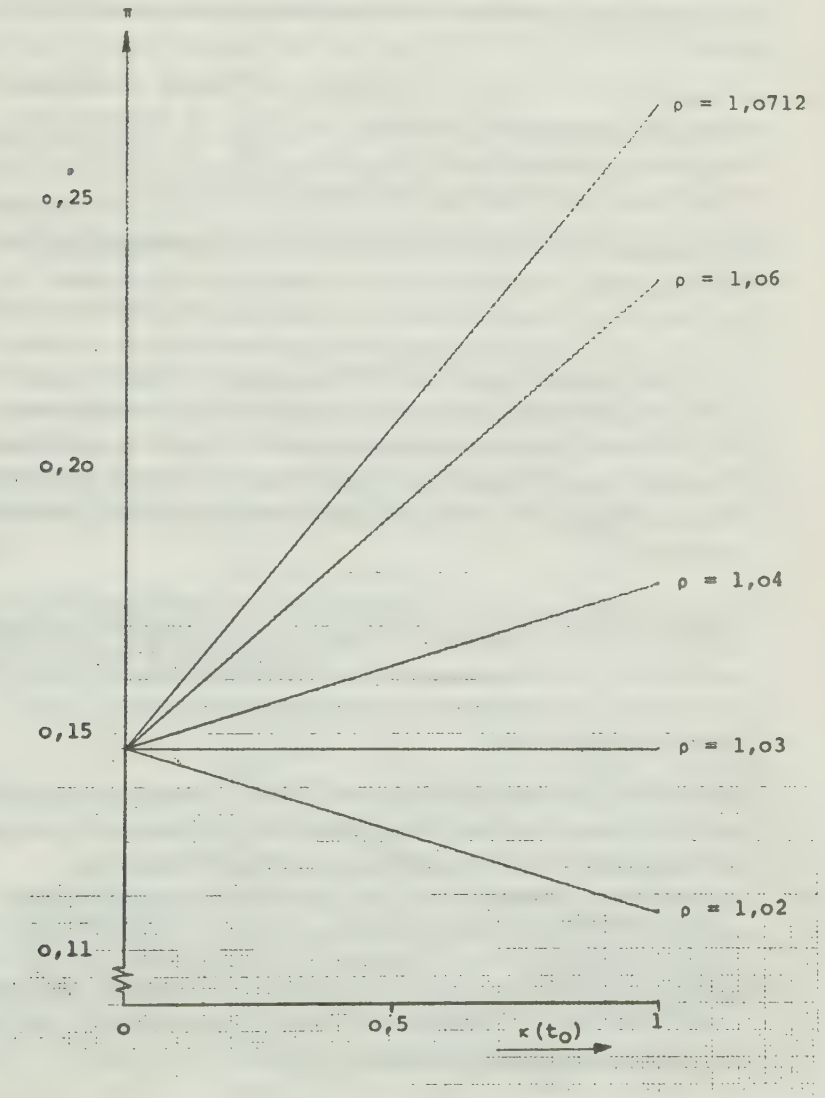
An dieser Stelle soll noch ein numerisches Beispiel angeführt werden, das den Vergleich mit der eingangs (A II.4) beschriebenen Modellkasse gestattet. Als Ausgangsgleichung für die numerische Betrachtung dient die Beziehung (67). Die Versichertenstruktur entspreche der Tafel 1960/62 M, der Rechnungszinsfuß betrage 3 %, und als Altersrente werden bei Erreichen der Altersgrenze 60 % des Einkommens gewährt. Die Größe V(1,03) ist für verschiedene Kombinationen x_o,s als V_o in der Tabelle 1 (s. S.16) enthalten. Für unser

---

78) Ein ähnliches, weniger allgemeines Ergebnis teilte Ammeter in [2] mit.

Darstellung 3

Prämie π in Abhängigkeit vom Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_o)$ und der Zuwachsrate ρ des Einkommens bei konstantem Zins $i = 0{,}03$ (π berechnet nach (67))



Beispiel wählen wir die Kombination $x_o = 25$, $s = 65$.

Legt man nun noch ρ fest, so ist die einheitlich in $x_o \leq x < s$ zu entrichtende Prämie eine Linearfunktion des (hier zeitlich invarianten) Kapitalisierungsgrades.

Die Prämie als Linearfunktion des Kapitalisierungsgrades $\kappa(t_o)$ für einige Werte ρ ist der Darstellung 3 zu entnehmen.

Zur tatsächlichen Größe von ρ und r ist jedoch anzumerken, daß derart extreme Differenzen, wie hier im Beispiel zur Illustration verwendet wurden ($\rho = 1{,}06$; $r = 1{,}03$), in der Praxis längerfristig kaum anzutreffen sind.

Auf längere Sicht wird auf Grund neuerer Planungen in der Bundesrepublik Deutschland ein Wachstum der Einkommen von 3 % bis 3,5 % p.a. als möglich angesehen. Dieser Größenordnung von ρ steht ein von der Aufsichtsbehörde zugelassener Rechnungszinsfuß von 3 % gegenüber. In der Praxis führen jedoch vereinzelt Unternehmen für das Neugeschäft Tarife mit einem Rechnungszinsfuß von 3 1/2, 3 3/4 oder 4 Prozent. Die Angleichung an die von der Aufsichtsbehörde vorgeschriebenen 3 % erfolgt durch Erhebung eines Prämienzuschlags.[79)]

Weiterhin ist bei Versorgungszusagen von Betrieben an Mitarbeiter die Bildung einer Pensionsrückstellung (praktisch in Höhe des Deckungskapitals) steuerlich zulässig[80)], wobei jedoch ein Rechnungszinsfuß von mindestens 5 1/2 % vorgeschrieben wird.

Für unsere Betrachtungen wollen wir aus diesen Zahlenangaben entnehmen, daß der Einkommenszuwachs längerfristig den Rechnungszinsfuß nicht nennenswert überschreitet. Voraussetzung hierfür ist, daß gesamtwirtschaftlich mit annähernd stabilen Verhältnissen gerechnet werden kann,

---

79) Tonndorf, Horn, [31], S. 145

80) § 6a Einkommensteuergesetz

d.h. von einer größeren Inflationsrate - die sich notwendig in der Entwicklung der nominellen Entgelte niederschlagen müßte - abgesehen wird.

D II. 4a.ß Dynamik bei variierendem Kapitalisierungsgrad

Bisher waren wir davon ausgegangen, daß der einmal vorhandene Kapitalisierungsgrad systemnotwendig sei und im Laufe der Zeit nicht unterschritten werden sollte (S. 62), und hatten danach die Prämie π bestimmt.

Selbstverständlich ergeben sich weitere Finanzierungsmöglichkeiten, wenn man eine Variation des Kapitalisierungsgrades im Zeitablauf zuläßt, Wir betrachten zunächst den Fall der Minderung des Kapitalisierungsgrades, d.h., es sei

$$\kappa(t_1) < \kappa(t_o). \tag{68}$$

Bis zum Zeitpunkt $t = t_o$ habe der Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_o)$ bestanden, und die diesem Kapitalisierungsgrad entsprechende, nach (67) berechnete Prämie π sei bis zum Zeitpunkt t_o-1 entrichtet worden. Vom Zeitpunkt t_o ab soll nun eine neue Prämie π_{t_o} entrichtet werden, für die wegen (68) gilt

$$0 \leq \pi_{t_o} < \pi .$$

Diese neue Prämie läßt sich aus (52) unter Berücksichtigung von (59) bestimmen als

$$\pi_{t_o} = p \left\{ \frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} + \frac{V(r)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} \left[\frac{\kappa(t_1)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{t_1-t_o} - \kappa(t_o)}{\sum_{t=t_o}^{t_1-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{t-t_o}} \right] \right\} \tag{69}$$

Die so bestimmte Prämie π_{t_o} ist t_1-$t_o$mal zu zahlen, bis das Finanzierungssystem im Zeitpunkt t_1 den Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_1)$ erreicht hat. Soll dieser Kapitalisierungsgrad für die Folgezeit erhalten bleiben, so ist im Zeitpunkt t_1 eine neue Prämie π_{t_1} wiederum nach (67) zu be-

stimmen. Mit Hilfe einer Herabsetzung des Kapitalisierungsgrades ist in unserem System also eine Reduzierung der Prämie - die bei Invarianz des Kapitalisierungsgrades notwendig wäre - immer nur für eine begrenzte Zeit möglich. Nach Ablauf dieser Zeit muß stets eine von der ursprünglichen, nicht reduzierten Ausgangsprämie π abweichende neue Prämie π_{t_1} erhoben werden, die jedoch nicht notwendig größer ist als π. Allgemein gilt in diesem Zusammenhange

$$\pi_{t_1} \begin{cases} > \pi & \text{für} \quad r > \rho \\ = \pi & \qquad\quad r = \rho \\ < \pi & \qquad\quad r < \rho \ . \end{cases}$$

Den Fall eines - bei langfristiger Betrachtung und normaler wirtschaftlicher Entwicklung - den Zins weit übersteigendes Einkommenswachstums wollen wir dabei (s.a. S. 66) außer Betracht lassen.

Auch hier wollen wir die Verhältnisse wieder an einem numerischen Beispiel erläutern, um eine Übersicht über die Größenordnung der Einflüsse zu erhalten.

Für $t < t_o$ sei in unserem Rentensystem bei konstandem Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_o)$ die nach (67) errechnete Prämie π erhoben worden.

Es soll jetzt eine neue Prämie $\pi_{t_o} < \pi$ festgesetzt werden für die Zeit, bis der neue Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_1) < \kappa(t_o)$ erreicht ist. Es ist also die Frage nach der Zeit gestellt, für die die niedrige Prämie π_{t_o} erhoben werden kann.

Dabei sollen wieder die gleichen numerischen Daten gelten wie im vorhergehenden Beispiel und zusätzlich die Forderung $\kappa(t_1) = 0$ gestellt werden.

Den gesuchten Zeitraum erhält man dann aus Beziehung (69) mit

$$(70\,a) \qquad s^{(1)}_{\overline{t_1-t_o}|} = \frac{V(r)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} 1(x)} \cdot \frac{\kappa(t_o)}{\frac{\sum_{x=s}^{\omega} 1(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} 1(x)} - \frac{\pi_{t_o}}{p}} \qquad \text{für } \rho \geq r$$

Tabelle 4

Zeitraum $[t_1-t_o]$, den das Rentensystem bei vorgegebener Prämie π_{t_o} (sowie bei vorgegebenen Werten ρ,r) benötigt, um vom Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_o)$ zum Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_1)$ zu gelangen. $(\kappa(t_o) > \kappa(t_1))$

$\kappa(t_1) \triangleq 0$

$\rho = 1{,}04$

$r = 1{,}03$

$[t_1 - t_o]$

π_{t_o}	$\kappa(t_o) = 1$	$\kappa(t_o) = 0{,}5$
0	18	9
$\frac{1}{4}\,\pi$ x)	25	13
$\frac{1}{2}\,\pi$	41	20
$\frac{2}{3}\,\pi$	71	32

$\kappa(t_1) \triangleq 0$

$\rho = 1{,}02$

$r = 1{,}03$

$[t_1 - t_o]$

π_{t_o}	$\kappa(t_o) = 1$	$\kappa(t_o) = 0{,}5$
0	22	10
$\frac{1}{4}\,\pi$ x)	29	14
$\frac{1}{2}\,\pi$	41	20
$\frac{2}{3}\,\pi$	57	29

x) Die hier verwendeten Werte π wurden nach (67) errechnet und in Tabelle 3 bereits aufgeführt.

($s^{(1)}_{\overline{n}|}$ ist der Zeitrentenendwert mit $r^{(1)} = \frac{\rho}{r}$) bzw. mit

(70 b) $$\ddot{a}^{(1)}_{\overline{t_1-t_o}|} = \frac{V(r)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} \cdot \frac{\kappa(t_o)}{\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)} - \frac{\pi_{t_o}}{\rho}}$$ für $\rho \leq r$

($\ddot{a}^{(1)}_{\overline{n}|}$ ist der Zeitrentenbarwert mit $v^{(1)} = \frac{\rho}{r}$).

Die Zeiträume sind für einige Kombinationen $\kappa(t_o)$, $\kappa(t_1)$, ρ, π_{t_o} der Tabelle 4 zu entnehmen.

D II.4b Berücksichtigung der Dynamik für den relativen Beharrungszustand

α Bei konstantem Kapitalisierungsgrad

Im folgenden Abschnitt soll der Einfluß untersucht werden, den eine veränderte Versichertenstruktur auf die angegebenen Prämien hat. Während bisher ein Modellversicherungssystem betrachtet wurde, dem eine natürliche Bevölkerung im absoluten Beharrungszustand als Versichertengesamtheit zugrunde lag, soll die Versichertengesamtheit jetzt durch eine Bevölkerung zwar gleichbleibender Struktur, aber zeitlich variierenden Umfanges dargestellt werden. Der absolute Beharrungszustand wird also durch den relativen Beharrungszustand[81)] ersetzt - oder anders ausgedrückt: Es werden für den Parameter λ, für den bisher galt $\lambda = 1$, auch andere Werte in Betracht gezogen.

Ausgegangen wird hierbei von der gleichen Beziehung, die auch für den Fall des absoluten Beharrungszustandes als Ausgangsgleichung diente, der Finanzierungsgleichung in der Form (52).

---

81) Siehe S. 30

Nach π aufgelöst erhalten wir wiederum die Bestimmungsgleichung für die Prämie mit

$$(71)\quad \pi = p\,\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)\cdot\lambda^{-x}}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x}} + \frac{F(t_1)\cdot v^{t_1-t_o} - F(t_o)}{G(t_o)\,c_o \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x} \sum_{t=t_o}^{t_1-1} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{t-t_o}}$$

Zur Bestimmung des Kapitalisierungsgrades (s. S.61) benötigen wir wieder die Maximalreserve (60).[82] In Verbindung mit (61) hat sie die Form

$$(72)\quad \max F(t) = \lambda^{t-t_o}\, G(t)\cdot c_o\cdot p\cdot V(\lambda,r).$$

Nehmen wir wieder an, daß der Kapitalisierungsgrad des Systems technisch bedingt sei und daher im Laufe der Zeit keiner Änderung unterliegen solle, so erhalten wir aus dieser Forderung, ausgehend vom Zeitpunkt t_o, die notwendige effektive Reserve im Zeitpunkt t_1.[83]

Analog zur Beziehung (66)[84] folgt somit als Lösung - unter Berücksichtigung der sozialpolitischen Forderungen und der wirtschaftlichen und technischen[85] Nebenbedingungen - die Prämie

$$(73)\quad \pi = p\,\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)\cdot\lambda^{-x}}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x}} + \frac{F(t_o)}{G(t_o)\,c_o \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x}} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r} - 1\right)$$

Führen wir den Kapitalisierungsgrad nach (62) explizit ein, so erhalten wir für unsere Prämie die endgültige Formel:

---

82) Siehe S.62

83) Siehe Beziehung (64), S. 63

84) Siehe S.63

85) Versicherungstechnische Nebenbedingung ist hier die zeitliche Invarianz des Kapitalisierungsgrades.

$$(74) \qquad \pi = p\left\{ \frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)\cdot\lambda^{-x}}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x}} + \frac{\kappa(t_o)\cdot V(\lambda,r)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x}} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r} - 1\right) \right\}$$

Man entnimmt dieser letzten Beziehung - wie auch schon der entsprechenden Beziehung (67) -, daß die Prämie π, ceteris paribus, eine Linearfunktion des Kapitalisierungsgrades ist, und daß die Prämie sich aus zwei Termen additiv zusammensetzt, deren ersten die Umlageprämie bildet. Der zweite Term gibt die Abhängigkeit der Prämie von Zins- und Einkommensentwicklung (bei jeweils unveränderter Versichertenstruktur und -entwicklung) an.

Unsere Ergebnisse können wir mithin ähnlich wie oben[86] formulieren: Für den Fall der Gleichheit von r (Aufzinsungsfaktor) mit dem Produkt aus ρ (Wachstumsrate der Einkommen) und λ (Wachstumsrate der Versichertengesamtheit) erhalten wir unabhängig vom Kapitalisierungsgrad die Umlageprämie.

Ist das Produkt $\rho\cdot\lambda > r$, so erhalten wir eine Prämie, die größer ist als die Umlageprämie, und zwar umso größer, je größer einerseits der Kapitalisierungsgrad und andererseits die Differenz $\rho\cdot\lambda - r$ sind.

Ist das Produkt $\rho\cdot\lambda < r$, so erhalten wir eine Prämie, die kleiner als die Umlageprämie ist, und zwar umso kleiner, je größer einerseits die Kapitalisierung und andererseits die Differenz $r - \rho\cdot\lambda$ sind.

Ein numerisches Beispiel soll an dieser Stelle wieder den Vergleich mit den bisher errechneten Größen ermöglichen. Gehen wir also von einer Gesamtheit aus, die in Struktur und Umfang durch die Tafel 1960/62 M 3% und $\lambda = 1{,}02$ charakterisiert sei. Die Grenzalter betragen $x_o = 25$, $s = 65$.

Die Ergebnisse für verschiedene Kombinationen $\rho\cdot\lambda$ sind der Darstellung 4 zu entnehmen. (Siehe S. 74)

---

86) Siehe S. 64

Tabelle 5

Zeitraum $[t_1-t_o]$, den das Rentensystem bei vorgegebener Prämie π_{t_o} (sowie bei vorgegebenen Werten ρ,λ,r) benötigt, um vom Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_o)$ zum Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_1)$ zu gelangen

$[t_1 - t_o]$

$\kappa(t_1) \stackrel{!}{=} 0$

$\rho \cdot \lambda = 1{,}0506$

$(\rho = 1{,}03)$

π_{t_o}	$\kappa(t_o) = 1$	$\kappa(t_o) = 0{,}5$
0	21	12
$\frac{1}{4}\,\pi$	32	17
$\frac{1}{2}\,\pi$	61	28
$\frac{2}{3}\,\pi$	--	50

$\kappa(t_1) \stackrel{!}{=} 0$

$\rho \cdot \lambda = 1{,}0404$

$(\rho = 1{,}02)$

π_{t_o}	$\kappa(t_o) = 1$	$\kappa(t_o) = 0{,}5$
0	24	12
$\frac{1}{4}\,\pi$	33	17
$\frac{1}{2}\,\pi$	56	27
$\frac{2}{3}\,\pi$	> 100	44

$\kappa(t_1) \stackrel{!}{=} 0$

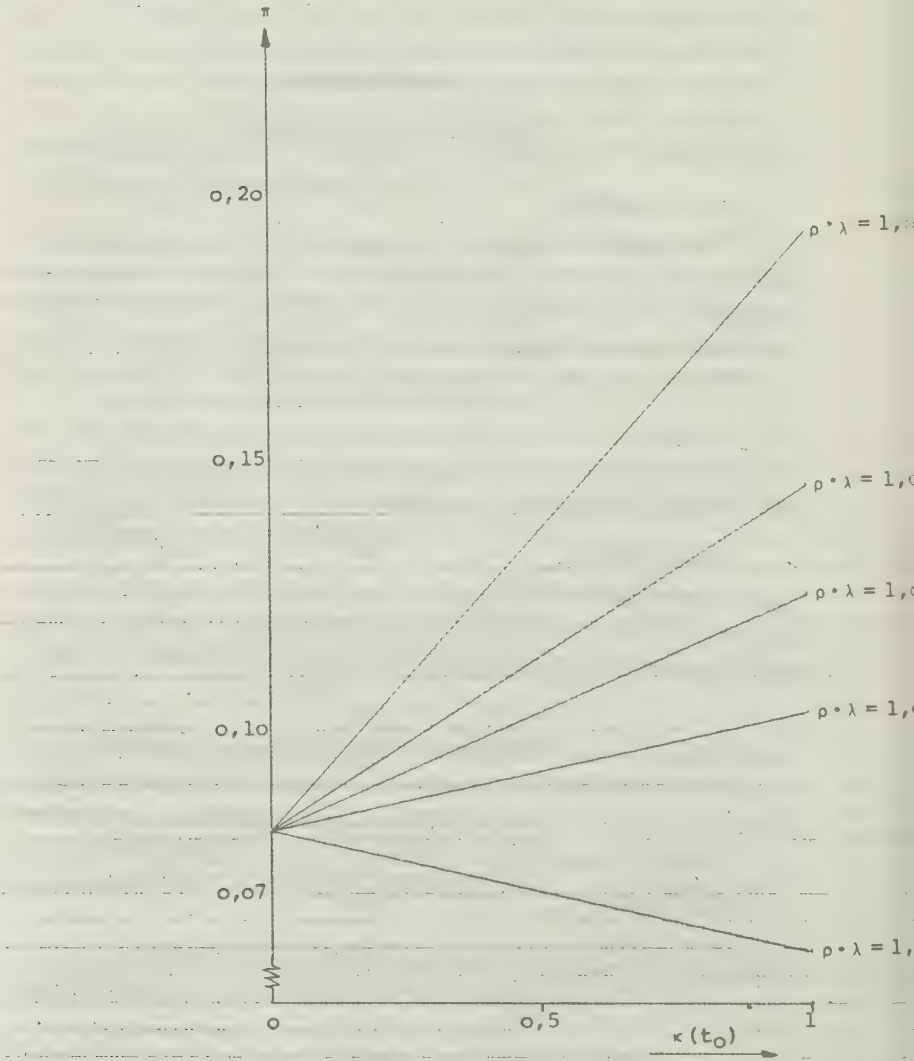
$\rho \cdot \lambda = 1{,}02$

$(\rho = 1{,}00)$

π_{t_o}	$\kappa(t_o) = 1$	$\kappa(t_o) = 0{,}5$
0	31	14
$\frac{1}{4}\,\pi$	40	18
$\frac{1}{2}\,\pi$	55	27
$\frac{2}{3}\,\pi$	75	38

D a r s t e l l u n g 4

Prämie π in Abhängigkeit vom Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_o)$, sowie den Zuwachsraten des Einkommens (ρ) und der Gesamtheit (λ) bei konstantem Zins $i = 0{,}03$ (π berechnet nach (74))



D II.4b.ß Bei variierendem Kapitalisierungsgrad

Auch hier, im Falle der Versichertengemeinschaft im relativen Beharrungszustand, ergeben sich abweichende Lösungsmöglichkeiten, wenn das Versicherungssystem aus technischen Gründen den Kapitalisierungsgrad herabsetzen kann. Galt z.B. bis zum Zeitpunkt t_o auf Grund der Beziehung (74) die Prämie π als Lösung und soll nun in der Zeitspanne $t_1 - t_o$ der Kapitalisierungsgrad auf $\kappa(t_1) < \kappa(t_o)$ herabgesetzt werden, so erhält man, ausgehend wieder von Beziehung (71) unter Berücksichtigung von (62) eine Prämie $\pi_{t_o} < \pi$ der Höhe

$$(75) \quad \pi_{t_o} = p \left\{ \frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x) \cdot \lambda^{-x}}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) \cdot \lambda^{-x}} + \frac{V(\lambda,r)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) \cdot \lambda^{-x}} \frac{\kappa(t_1) \left(\frac{\rho \cdot \lambda}{r}\right)^{t_1 - t_o} - \kappa(t_o)}{\sum_{t=t_o}^{t_1 - 1} \left(\frac{\rho \cdot \lambda}{r}\right)^{t - t_o}} \right\}$$

Es ist auch hier wieder zu bemerken, daß die Prämie π_{t_1}, die nach Erreichen des niedrigeren Kapitalisierungsgrades $\kappa(t_1)$, $\kappa(t_1) < \kappa(t_o)$, entrichtet werden muß, außer von der Kapitalisierung weitgehend vom Zins r und den Wachstumssätzen $\rho \cdot \lambda$ abhängig ist. Es gilt hierbei

$$\pi_{t_1} \begin{cases} > \pi & \text{für} \quad r > \rho \cdot \lambda \\ = \pi & \qquad\quad r = \rho \cdot \lambda \\ < \pi & \qquad\quad r < \rho \cdot \lambda \end{cases}$$

Für den letzten der hier zitierten Fälle $r < \rho \cdot \lambda$ gilt in Verbindung mit den Simulationsergebnissen ($\lambda \approx 1{,}0055$) das auf Seite 66 Gesagte. Für die Praxis wird man also davon absehen können, daß das Produkt der Wachstumssätze $\rho \cdot \lambda$ (λ = Bevölkerungswachstum, ρ = Wachstum der Entgelte) den Aufzinsungsfaktor r bedeutend übersteigt.

Für ein numerisches Beispiel wollen wir wieder annehmen, daß ein Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_1) = 0$, ausgehend von $\kappa(t_o) = 1$ oder $\kappa(t_o) = 0{,}5$, angestrebt werden solle. Analog zu den Beziehungen (70a) bzw. (70b) erhalten wir dann hier:

$$(76)\quad \frac{V(\lambda,r)}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x}} \cdot \frac{\kappa(t_o)}{\frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x)\cdot\lambda^{-x}}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x}} - \frac{{}^{\pi}t_o}{p}} = \begin{cases} s\overline{\frac{(1)}{t_1-t_o}} & \text{für } \rho\cdot\lambda \geq r \\ \ddot{a}\overline{\frac{(2)}{t_1-t_o}} & \text{für } \rho\cdot\lambda \leq r \end{cases}$$

wobei die Zeitrentenwerte mit $r^{(1)} = \frac{\rho\cdot\lambda}{r}$ bzw. $r^{(2)} = \frac{r}{\rho\cdot\lambda}$ berecnnet wurden.

Die Zeitspannen, innerhalb deren man die Prämien durch Reduktion des Kapitalisierungsgrades senken kann, lassen sich für verschiedene Kombinationen $\rho\cdot\lambda$ der Tabelle 5 entnehmen.

Wichtig ist es, hier noch einmal auf folgendes hinzuweisen: Im zuletzt betrachteten Falle wurde primär der Kapitalisierungsgrad herabgesetzt. Das könnte der Fall sein, wenn sich ein Dritter - hier praktisch der Staat - bereiterklärt, für gewisse Leistungen einzutreten. Die Aktion besteht also hier in der Herabsetzung des Kapitalisierungsgrades, und sie hat zur Folge, daß die Prämie für einen begrenzten Zeitraum $(t_o, t_1]$ gemindert werden kann. Hat - um ein Beispiel zu nennen - die Versicherung bis zum Zeitpunkt t_o nach dem Kapitalisierungsgrad $\kappa(t) = 1$ (Anwartschaftsdeckungsverfahren) finanziert, so könnte sie auf einen niedrigeren Kapitalisierungsgrad heruntergehen, wenn der Staat sich verpflichtete, bei Ausscheiden aus der Sozialversicherung unter Leistungsverzicht die Differenz zwischen dem Anwartschaftsdeckungskapital und der vorhandenen - auf den Versicherten bezogene - Reserve zuzuschießen.

Diese Differenz müßte zugeschossen werden, da ein Abfinden mit dem vollen Anwartschaftsdeckungskapital aus der Reserve des Rentensystems nur für den Fall $\kappa(t) = 1$ vorgesehen und möglich ist.

Eine Gefahr für das Versicherungssystem enthält der umgekehrte Fall, wenn nämlich aus Gründen, die außerhalb der Versicherung liegen, auf einen Beitrag gedrungen wird, der eine Beibehaltung des Kapitalisierungsgrades nicht ermög-

licht. Dabei müßte auf die Leistungen hingewiesen werden, die durch die Verminderung der Prämie nicht mehr gedeckt sind und für die demzufolge die Versicherung nicht mehr aufkommen kann. Der eklatanteste Fall in diesem Zusammenhang ist der, daß bei einer - durch die Herabsetzung von π induzierten - Reduktion auf $\kappa(t) = 0$ ein Ausscheiden aus der Versicherung schon definitionsgemäß nicht mehr honoriert werden kann.

D II.5 Lösungen bei Erweiterung des schutzbedürftigen Personenkreises

Grundsätzlich kann man für die Finanzierung anstelle der bisher nur in Betracht gezogenen Herabsetzung des Kapitalisierungsgrades auch dessen Aufstockung in Erwägung ziehen. Das würde jedoch bedeuten, daß die Prämie, die wir als Ergebnis bekommen, größer ist als die Prämie, die sich bei konstantem Kapitalisierungsgrad ergäbe. Verwendet man im Zusammenhang mit der gesamten zwangsweisen Einkommensverwendung[87] bei den Versicherten als maximal zumutbare Prämie die Umlageprämie selbst, so müßte für die bis t_o bei einem Kapitalisierungsgrad $0 < \kappa(t_o) < 1$ gezahlte Prämie π die Ungleichung

$$(77) \qquad \frac{\pi}{p} < \frac{\sum_{x=s}^{\omega} l(x) \cdot \lambda^{-x}}{\sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) \cdot \lambda^{-x}}$$

gelten.

Setzt man jetzt die von t_o ab zu entrichtende Prämie gleich der Umlageprämie, so kann man damit eine Aufstokkung des Kapitalisierungsgrades erreichen.

Die Voraussetzungen für die Möglichkeit der technischen Realisierung einer Aufstockung des Kapitalisierungsgrades bei Zahlung der Umlageprämie lassen sich der Beziehung

87) Siehe S. 58

(74)[88] entnehmen und lauten

(78 a) $\quad 0 < \kappa(t_o) < 1$

(78 b) $\quad \rho \cdot \lambda < r.$

Wir erhalten mithin das interessante Ergebnis, daß das Rentensystem, das einmal auf dem Kapitalisierungsgrad $\kappa(t) = 0$ (Umlageverfahren) angelangt ist, nur mit erheblichen finanziellen Belastungen für den einzelnen wieder auf einen höheren Kapitalisierungsgrad anzuheben ist. Der dabei zu zahlende Beitrag geht dabei trivialerweise über die Umlageprämie hinaus.

Wird im Rentensystem nach einem Verfahren finanziert, das vom Umlageverfahren abweicht - d.h. ist der Bedingung (78a) genügt -, so kann bei Zahlung der Umlageprämie der Kapitalisierungsgrad angehoben werden, wenn das Produkt aus den Wachstumsraten von durchschnittlichem Einkommen (ρ) und Bestand (λ) kleiner als der Aufzinsungsfaktor auf Grund des Marktzinses ist, d.h., wenn der Bedingung (78b) genügt ist.

Wir erhalten aus dieser versicherungsmathematischen Sicht heraus das wirtschaftlich einleuchtende Ergebnis, daß bei inflationären Tendenzen, die sich zwangsläufig in der allgemeinen Einkommensentwicklung niederschlagen, eine andere als die Umlagefinanzierung ($\kappa(t) = 0$) technisch nicht möglich ist, wenn über die Umlageprämie nicht hinausgegangen werden soll.

Führt nun aber keiner der hier aufgezeigten Modifikationen im Endergebnis zu einer tragbaren Prämie[89], so ist es wiederum an den Trägern der Sozialpolitik, ihre Zielvorstellungen so zu revidieren, daß die Belastung - auf das einzelne Mitglied bezogen - tragbar wird. Will man beim Lebensstandard der Rentner von Differenzierung zwischen den einzelnen Generationen als sozialpolitisch unerwünscht ab-

---

88) Siehe S. 72
89) S. hierzu S. 58

sehen, d.h. an einer weiteren Vollanpassung festhalten, so ergeben sich als Aktionsparameter zunächst p und das Grenzalter s. Man könnte p als den die relative Rentenhöhe charakterisierenden Parameter herabsetzen oder das Rentenbeginnalter s erhöhen, um die zwangsweise Einkommensverwendung auf ein tragbares Maß zu reduzieren.

Eine der oben (B II.3) angeführten Zielvorstellungen betraf die Abgrenzung des Kreises der Schutzbedürftigen. Denkbar ist nun der Fall, daß die Träger der Sozialpolitik eine Erweiterung des einmal abgegrenzten Personenkreises aus sozialpolitischen Erwägungen heraus befürworten. Wir wollen für diesen Fall die sich so ergebenden Möglichkeiten anhand unseres Modellrentensystems aufzeigen.

In unseren bisherigen Betrachtungen war der Kreis der versicherten Personen charakterisiert durch

$$\sum_{x=x_o}^{\omega} L(x,t) = c_o \cdot \lambda^{t-t_o} \sum_{x=x_o}^{\omega} l(x) \cdot \lambda^{-x} \quad .90)$$

Der Bestand, der jetzt zusätzlich in den Kreis der bereits Versicherten einbezogen werden soll, habe die gleiche Altersstruktur und werde durch den Umfangsparameter c'_o, $c'_o < c_o$ gekennzeichnet.

Wir können nun von unseren bisherigen Ergebnissen ausgehen, wenn wir voraussetzen, daß alle anderen sozialpolitischen Zielvorstellungen unverändert bleiben und auch der technisch bedingte Kapitalisierungsgrad beibehalten werden soll.

Als zusätzliche Bedingung wollen wir die Forderung stellen, daß die hinzukommende Gesamtheit ihre - nach dem jeweiligen Kapitalisierungsgrad notwendigen Anwartschaften - selbst finanzieren solle. Es steht also zum Zeitpunkt t_o der Bestandserweiterung kein Fonds für die Neueintretenden zur Verfügung. Sollen andererseits aber auch keine Gewinne gemacht werden, so erhebt sich die Frage

---

90) Absoluter Beharrungszustand $\lambda = 1$,
relativer Beharrungszustand $\lambda > 1$.

nach den Ansprüchen, die unter dieser zusätzlichen Nebenbedingung vom Versicherungssystem zuerkannt werden können. Das Grenzalter, bis zu welchem einschließlich die vollen Rentenansprüche (d.h. Zahlung der Altersrente $p \cdot G(t)$) zuerkannt werden, sei hier mit x_e bezeichnet.

Für den Fall $x_e < s$ ist von den neu zu Versichernden die Prämie π (auf Grund Beziehung (74)) zu erheben.

Im Fall $x_e \geq s$ ist die Prämie π nur von den Aktiven ($x_o \leq x < s$) zu erheben, während allen anderen, der sog. "alten Last", Ansprüche ohne Prämienleistungen zuerkannt werden.

In den extremen Fällen erhalten wir

$$x_e = x_o, \quad \text{wenn } \kappa(t_o) = 1 \text{ gilt}$$

und

$$x_e = \omega, \quad \text{wenn } \kappa(t_o) = 0 \text{ gilt.}$$

Das heißt: Wird einmal nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren finanziert, dessen Prämie nach (74) bestimmt ist, so kann von der hinzutretenden Gesamtheit nur die Altersgruppe der x_o-Jährigen aufgenommen werden, wenn weder Gewinn noch Verlust für die Gesamtheit aller Versicherten[91] entstehen soll.

Zum anderen kann, wenn das System nach dem Umlageverfahren finanziert wird, von der hinzutretenden Gesamtheit in unserem Modell die gesamte "alte Last" mit aufgenommen werden, ohne daß Gewinn oder Verlust entsteht.

In der Praxis ist nun stets davon auszugehen, daß x_e im Intervall $[x_o, s)$ liegt. Wieweit dieses Grenzalter an die untere Grenze des Intervalls heranrückt, hängt im konkreten Falle davon ab, wie die Möglichkeiten der Befreiung von der Versicherungspflicht für die Eintrittsgeneration im einzelnen lauten und inwieweit Gebrauch von ihnen gemacht wird.

Im Rahmen des Modells läßt sich jedoch mit Bestimmtheit sagen, daß bei einer Erweiterung des Kreises der Versicherten

---

91) Bestandsumfangsparameter $C_o = c_o + c'_o$

die Kombination $\kappa(t_o) = 0$, $x_e \leq s$ für die Versicherung finanziell eine Gewinnsituation bedeutet.

Weiterhin werde angenommen, daß eine Bestandserweiterung zum Zeitpunkt t_e erfolge. Vom Zeitpunkt $t=t_1=t_e+\omega-x_e$ an soll sich das System wieder im Gleichgewicht befinden, so daß für die Teilgesamtheit, gekennzeichnet durch c'_o, analog (52)[92] gilt:

$$(79) \qquad F'(t) + \pi \cdot G(t) \cdot c'_o \, \lambda^{t-t_o} \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x) \cdot \lambda^{-x} =$$

$$= p \cdot G(t) \cdot c'_o \, \lambda^{t-t_o} \sum_{x=s}^{\omega} l(x) \cdot \lambda^{-x} + F'(t+1)v$$

für alle t, $t_1 \leq t$.[93]

Bis zum Zeitpunkt t_1 wird für die hinzukommende Gesamtheit der systembedingte Fonds

$$(80) \qquad F'(t_1) = \kappa(t_o) c'_o \cdot p \cdot G(t_1) \cdot \lambda^{t_1-t_o} V(\lambda,r)$$

aufgebaut.

Den Zusammenhang zwischen Kapitalisierungsgrad $\kappa(t_e)$ und Grenzalter x_e erhalten wir auf Grund der Beziehungen:

---

92) S. 54

93) Das gleiche gilt natürlich auch für den Gesamtbestand, gekennzeichnet durch den Bestandsparameter $C_o = c_o + c'_o$.

$$(81)\qquad \pi \{ \sum_{\tau=0}^{s-x_e-1} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{\tau} \sum_{x=x_o}^{x_e+\tau} l(x)\cdot\lambda^{-x} + \sum_{\tau=s-x_e}^{\omega-x_e} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{\tau} \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x} \} =$$

$$= p \{ \sum_{\tau=0}^{\omega-s} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{t+s-x_e} \sum_{x=s}^{s+\tau} l(x)\cdot\lambda^{-x} + \kappa(t_e) \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{\omega+1-x_e} V(\lambda,r) \}$$

für $x_o \leq x_e < s$ bzw.

$$(82)\qquad \pi \{ \sum_{\tau=0}^{\omega-x_e} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{\tau} \sum_{x=x_o}^{s-1} l(x)\cdot\lambda^{-x} \} =$$

$$= p \{ \sum_{\tau=0}^{\omega-x_e} \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{\tau} \sum_{x=s}^{x_e+\tau} l(x)\cdot\lambda^{-x} \} + \kappa(t_e)\cdot p\cdot \left(\frac{\rho\cdot\lambda}{r}\right)^{\omega+1-x_e} V(\lambda,r)$$

für $s \leq x_e \leq \omega$.

Diese beiden letzten Beziehungen, die Bestimmungsgleichungen für x_e, sind relativ komplizierte Ausdrücke, und man müßte sich bei speziell interessierenden praktischen Fragestellungen zur iterativen Bestimmung der gesuchten Größe x_e elektronischer Großrechenanlagen bedienen.

Zum Abschluß sei noch einmal zusammenfassend auf den Ausgangspunkt, die verwendeten Mittel und die Ergebnisse der Betrachtungen hingewiesen. In der Arbeit wird von konkreten sozialpolitischen Zielen, wie sie für die Alterssicherung in

der BRD aufgestellt wurden, ausgegangen. Diese Ziele sind aus der umfangreichen Diskussion heraus begründet worden, die um die grundlegende Neuregelung der Deutschen Sozialen Rentenversicherung (Rentenversicherungsneuregelungsgesetz von 1957) stattfand. Quantifiziert wurden die Ziele dann in einem versicherungsmathematischen Modell, das aus einer elementaren Äquivalenzgleichung entwickelt wurde. Konstruktionselemente dieses Modells waren neben den Zielvorstellungen einmal wirtschaftliche Fakten - hier vornehmlich das mittlere Arbeitsentgelt und seine Entwicklungstendenz -, zum anderen Größen, die mit dem Bestand, seinem Umfang und seiner Struktur in Zusammenhang stehen. Diese Größen wurden in der Arbeit als biometrische Größen bezeichnet. Sie sind ausschließlich real aufzufassen. Im Gegensatz hierzu sind die monetären Einkommen (Arbeitsentgelte, Renten) Nominaleinkommen, d.h., es wird im zeitlichen Vergleich nur der Geldbetrag, nicht aber die Geldwertänderung betrachtet.

Die Lösungen, die sich schließlich aus dem Modell auf Grund der Zielvorstellungen ergeben, bestehen stets aus funktionalen Verknüpfungen von Reserve (Fonds), Finanzierungsverfahren und zu entrichtendem Beitrag. Jedes Finanzierungsverfahren wird dabei durch einen Kapitalisierungsgrad eindeutig beschrieben.

Tabelle 2

Für die Iteration (C II.4, S.37) benutzte numerische Werte

x	$L_w(x,t_o)\cdot 10^{-3}$	$f(x)\cdot 10^3$	$\frac{l_w(x+1)}{l_w(x)}$	x	$L_w(x,t_o)\cdot 10^{-3}$	$\frac{l_w(x+1)}{l_w(x)}$
o	457,4		o,97222	5o	429,8	o,99555
1	44o,8		o,99799	51	44o,1	o,99519
2	424,5		o,99892	52	441,4	o,99479
3	412,4		o,99921	53	433,8	o,99434
4	398,9		o,99935	54	425,o	o,99384
5	385,1		o,99944	55	4o6,6	o,99328
6	376,1		o,99952	56	4o1,4	o,99265
7	37o,o		o,9996o	57	387,8	o,99193
8	367,6		o,99965	58	382,2	o,99111
9	367,7		o,99969	59	38o,9	o,99o19
1o	368,6		o,99972	6o	362,7	o,98915
11	375,8		o,99972	61	351,4	o,98796
12	369,5		o,99972	62	338,4	o,98662
13	342,3		o,99969	63	325,3	o,985o9
14	344,1		o,99965	64	316,3	o,98335
15	255,3	o,43731	o,9996o	65	3o1,1	o,98138
16	323,2	2,52672	o,99954	66	285,8	o,97917
17	374,1	9,86394	o,99948	67	273,7	o,97669
18	36o,7	22,64334	o,99943	68	254,6	o,97389
19	416,1	35,95724	o,9994o	69	241,7	o,97o73
2o	435,2	48,29931	o,99938	7o	228,7	o,96715
21	491,4	59,62o99	o,99938	71	213,8	o,963o5
22	459,1	71,18561	o,99938	72	2oo,o	o,95838
23	431,9	79,34888	o,99937	73	187,6	o,953o6
24	421,4	83,965o1	o,99933	74	169,5	o,947o6
25	414,o	85,9o864	o,99927	75	175,9	o,94o39
26	413,8	84,74246	o,99922	76	142,2	o,933o8
27	342,9	8o,9o379	o,99917	77	126,3	o,9251o
28	323,1	75,36443	o,99911	78	114,2	o,9164o
29	336,o	69,92225	o,99o6	79	1o1,6	o,9o694
3o	361,8	64,o4275	o,999o1	8o	88,5	o,89669
31	371,6	57,o4567	o,99895	81	77,5	o,8856o
32	376,9	5o,43731	o,99889	82	67,3	o,87369
33	372,6	43,48882	o,99881	83	56,5	o,861o4
34	382,3	38,14382	o,99872	84	46,1	o,8477o
35	399,o	32,79883	o,99862	85	38,2	o,83374
36	41o,3	28,377o6	o,9985o	86	28,9	o,81921
37	4o3,1	23,95529	o,99839	87	22,o	o,8o377
38	421,5	19,77648	o,99826	88	16,2	o,78712
39	45o,4	16,22934	o,99813	89	1o,6	o,769o7
4o	453,9	12,87657	o,99799	9o	7,8	o,75179
41	453,2	9,71817	o,99784	91	5,9	o,73475
42	245,7	6,6o835	o,99767	92	3,8	o,71812
43	222,4	4,17881	o,99748	93	2,6	o,7o2o9
44	246,7	2,721o8	o,99726	94	1,7	o,68683
45	277,2		o,997o1	95	1,1	o,6725o
46	42o,4		o,9967 4	96	o,7	o,65925
47	431,9		o,9964 6	97	o,4	o,64721
48	442,1		o,99618	98	o,3	o,63652
49	433,9		o,99587	99	o,1	o,62726
				1oo	o,1	o,61953

$L_w(x,t_o)$ = Wohnbevölkerung am 6. 6. 1961

$f(x)$ = Lebendgeborene Mädchen auf 1.000 Frauen des Altersy

$l_w(x+1)/l_w(x)$ = nach Allgemeiner Sterbetafel 196o/62 Frauen

Verzeichnis der in der Arbeit zitierten Literatur

[1] Achinger,H., J.Höffer, H.Muthesius und L.Neundörfer: Neuordnung der Sozialen Leistungen (Rothenfelser Denkschrift). Köln 1955

[2] Ammeter,H.: Über die Äquivalenz von Finanzierungssystemen in offener Kasse.
In: Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd.63, 1963, SS. 85 - 100

[3] Bundesminister für Arbeit und Sozialordnung: Die versicherungstechnischen Bilanzen der Rentenversicherung der Arbeiter und der Rentenversicherung der Angestellten für den 1. Januar 1959 (abgedruckt in: Bundesarbeitsblatt, 1. Oktoberheft 1962, Nummer 19, SS. 641 - 800)

[4] Bundesminister für Arbeit und Sozialordnung: Die versicherungstechnischen Bilanzen der Rentenversicherung der Arbeiter und der Rentenversicherung der Angestellten für den 1. Januar 1961 und den 1. Januar 1963. (Bundesratsdrucksache 252/65)

[5] Bundesministerium für Arbeit und Sozialordnung: Gedanken zur Öffnung der Rentenversicherung für Selbständige. Umdruck der Pressestelle des BMA vom 16.7.1965

[6] Bundesregierung: Entwurf eines Gesetzes zur Neuregelung des Rechts der Rentenversicherung der Arbeiter und der Angestellten.
Bundestagsdrucksache Nr. 2437 (abgedruckt in: Richter "Sozialreform" F X SS. 119 - 224)

[7] Christliche Demokratische Partei Deutschlands u.a.: Änderungsantrag der Fraktionen der CDU/CSU, FDP und DP vom 21. Februar 1952 (abgedruckt in: Richter "Sozialreform" F II, S. 4)

[8] Deutscher Gewerkschaftsbund: Neues DGB Aktionsprogramm (1965); (abgedruckt in: Richter "Sozialreform" H I 1s, SS. 139 - 142)

[9] Dublin,L.I. und A.J.Lotka: On the true Rate of Natural Increase. In: Journal of the American Statistical Association, Vol. XX, 1925, SS. 3o5 - 339

[1o] Feller,W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol.I, New York/London 195o

[11] Heubeck,G. und K.Fischer: Richttafeln für die Pensionsversicherung. Weissenburg, 1956

[12] Heubeck,G.: Beziehung zwischen Frühinvalidität und Arbeitslosigkeit. In: Zentralblatt für Arbeitswissenschaft, 1959, S.133

[13] Heubeck,G.: Der Belastungsfaktor in Pensionsprogrammen mit geometrisch wachsendem Zugang. In: Berichte des XVI. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Brüssel 196o, Bd. 1, SS. 231 - 238

[14] Heubeck,G.: Finanzpolitik, Finanzmathematik und Finanzierungsprobleme in der Sozialversicherung. Heft 21 des Studienwerkes der Sozialversicherung, Sozialhilfe und Versorgung. Herausgeber: Jantz,K.

[15] Jantz,K. und H.Zweng: Kommentar zu den Gesetzen der Neuregelung des Rechts der Rentenversicherung der Arbeiter und der Rentenversicherung der Angestellten, Stuttgart 1957

[16] Kaiser,E. und U.Nonella: Variationen wirtschaftsstatistischer Rechnungsgrundlagen in der Rentenversicherung. In: Berichte des XVI. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker. Brüssel 196o, Bd. I, SS. 468 - 497

[17] Kaiser,E.: Funktionalgleichungen der Sozialmathematik. In: Internationale Zeitschrift für versicherungsmathematische und statistische Probleme der Sozialen Sicherheit, 1962, SS. 93 - 164 (italienische Fassung). Deutsche Fassung: Rom 1964

[18] Löwe,H.: Neue Invalidisierungshäufigkeiten aus dem Material der deutschen gesetzlichen Rentenversicherung. In: Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. 8 (1966), SS. 3 - 24

[19] Richter,M.: Die Sozialreform. Dokumente und Stellungnahmen. Bd. I - IX, Bad Godesberg ab 1956

[2o] Saxer,W.: Versicherungsmathematik. 1.Teil (1955); 2.Teil (1958); Berlin, Göttingen, Heidelberg

[21] Schellenberg,E.: Unser Weg zur Sozialreform. Sozialpolitisches Grundsatzreferat auf dem Kongreß der SPD: "Die Neuordnung Deutschlands", Januar 1956 (abgedruckt in Richter: "Sozialreform" G II 2, SS. 7 - 18)

[22] Schreiber,W.: Sozialpolitik. In: Handbuch der Wirtschaftswissenschaften, Köln und Opladen 1966; Bd. 2, SS. 269 - 3o6

[23] Sozialdemokratische Partei Deutschlands: Antrag der Fraktion der SPD vom 23.1.1952 (abgedruckt in Richter: "Sozialreform" F I, S.3)

[24] Sozialdemokratische Partei Deutschlands: Antrag der Fraktion der SPD vom 18. April 1956 (Bundestagsdrucksache Nr. 2314)

[25] Sozialdemokratische Partei Deutschlands: Die Volksversicherung. Bonn 1965

[26] Sozialenquête - Kommission: Soziale Sicherung in der Bundesrepublik Deutschland (Sozialenquête), Stuttgart 1966

[27] Statistisches Bundesamt: Vorausschätzung der Bevölkerung für die Jahre 1964 - 2000; (Fachserie A, Reihe 1, Sonderbeitrag)

[28] Statistisches Bundesamt: Vorausschätzung der Bevölkerung für die Jahre 1966 - 2000; (Fachserie A, Reihe 1, Sonderbeitrag)

[29] Statistisches Bundesamt: Allgemeine Sterbetafel für die BRD 196o/62; (Fachserie A, Reihe 2, Sonderbeitrag)

[3o] Statistisches Bundesamt: Statistische Jahrbücher für die Bundesrepublik Deutschland 1961, 1962, 1963, 1965 und 1966; Wiesbaden

[31] Tonndorf,F. und G.Horn: Lebensversicherung von A bis Z. Karlsruhe 1965

[32] Thullen,P.: Anotationes Sobre El Estado Financiero Relativarmente Estacionario De Un Sistema De Seguro. Sonderdruck aus den Mitteilungen der Internationalen Konferenz der Versicherungsmathematiker und Statistiker der Sozialen Sicherheit, Rom 1959

[33] Thullen,P.: Über die Eintritts- und Abnahmeintensitäten einer Bevölkerung und über das Verhalten der Bevölkerungsfunktion, insbesondere relativ stationärer Bevölkerungen. In: Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 60, SS. 187 - 200

[34] Verband Deutscher Rentenversicherungsträger (Hrsg.): Kommentar zur Reichsversicherungsordnung (viertes und fünftes Buch), 5.Auflage, Stand 1. März 1956

[35] Verband Deutscher Rentenversicherungsträger (Hrsg.): Deutsche Rentenversicherung (Zeitschrift), Jg. 1966

[36] Wünsche,G.: Strukturanalyse der Verfahren zur Rentenfinanzierung. In: Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Bd. 4 (1964), SS.49o - 517

Verzeichnis der in der Arbeit benutzten Symbole und Abkürzungen

I. Symbole

A_j	allgemeine Bemessungsgrundlage für Versicherungsfälle, die im Kalenderjahr t eintreten
A_t	summierte Leistungen des Rentensystems im Kalenderjahr t (bezogen auf den Jahresbeginn)
a_ν	Koeffizienten einer Differenzengleichung
$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	Barwert einer n-mal pränumerando zahlbaren Zeitrente
$\ddot{a}_z$	Barwert einer pränumerando zahlbaren Leibrente für einen z-Jährigen
${}_m\ddot{a}_z$	Barwert einer um m Jahre aufgeschobenen pränumerando zahlbaren Leibrente für einen z-Jährigen
$\ddot{a}_{z:\overline{m}\rceil}$	Barwert einer pränumerando zahlbaren kurzen Leibrente für einen z-Jährigen (maximal m-mal zahlbar)
$B(t) = B_m(t)+B_w(t)$	Bestand zum Zeitpunkt t (speziell: Bestand an Versicherten)
B_n	individuelle Bemessungsgrundlage eines Versicherten bei n Beitragsjahren
c, c', C	den Gesamtheitsumfang kennzeichnende Parameter
$c_o = \frac{L}{l(o)}$	konstanter Faktor
d, i, r, v	Zinsgrößen
E_t	summierte Einnahmen des Rentensystems im Kalenderjahr t (bezogen auf den Jahresbeginn)
ε	Rentensatz
F(t)	Gesamtreserve (Fonds) zum Zeitpunkt t

$f(x)$ altersspezifische Fruchtbarkeitsziffern

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x_1 \leq x \leq x_2 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\psi(t)$ normierte Bestandszugangsfunktion im Zeitpunkt t

$G(x,t)$ Einkommen (Arbeitsentgelt), das ein x-Jähriger im Kalenderjahr t im Mittel erzielt

$x_o \leq x < s$

$G(t)$ durchschnittliches Arbeitsentgelt aller Versicherten im Kalenderjahr t

$G^i(t)$ individuelles Arbeitsentgelt eines Versicherten im Kalenderjahr t

j Kalenderjahr der Rentenfestsetzung

k Sexualproportion

$\kappa(t)$ Kapitalisierungsgrad des Rentensystems im Zeitpunkt t

$l_m(x)$, $l_w(x)$, $l(x)$ Struktur der Gesamtheit (Überlebendenordnungen Männer, Frauen, gesamt)

$L(x,t)$ Bestand an x-Jährigen im Zeitpunkt t (speziell: Versicherte)

$L(0,t) = L_m(0,t) + L_w(0,t)$
Zugang an Nulljährigen (Geburten) im Zeitpunkt t

λ Wachstumsrate der Bevölkerung

n mit Beiträgen belegte Versicherungsjahre des Versicherten

N gesamte anrechnungsfähige Versicherungsjahre des Versicherten

$\pi(t)$ einheitlicher allgemeiner Beitrag, den das Versichertensystem im Jahre t erhebt

p — Anteil der Rente am Durchschnittseinkommen der Aktiven im Jahre der Neufestsetzung

$R(x,t)$ — Rente, die ein x-Jähriger im Kalenderjahr t durchschnittlich erzielt
$s \leq x \leq \omega$

R_o — reine Reproduktionsziffer

R_j — individuelle Jahresaltersrente beim Eintritt in das Rentenalter zum Zeitpunkt j

ρ — Wachstumsrate der Arbeitsentgelte

$s_{\overline{n}|}$ — Endwert einer n-mal postnumerando zahlbaren Zeitrente

t — Kalenderzeit (jeweils Jahresbeginn)

T_o — auf t_o abgezinste bereits festgelegte Ausgaben in $t \geq t_o$

${}_mV_{x_o}$ — Deckungskapital für einen x_o+m-Jährigen nach m Jahren Beitragsleistung

$V_o = c \sum_{m=o}^{\omega - x_o} l(x_o+m)\ {}_mV_{x_o}$
spezielle Gesamtreserve für ein spezielles Altersrentensystem bei Finanzierung nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren

$V(\lambda,r)$ — Spezielle normierte Gesamtreserve bei Finanzierung nach dem Anwartschaftsdeckungsverfahren
$V(1,r) = V(r) = V_o$

x, $0 \leq x \leq \omega$ — Lebensalter

x_o, s, x_e — versicherungstechnische Grenzalter

II. Abkürzungen

RVO: Reichsversicherungsordnung

AVG: Angestelltenversicherungsgesetz

ArV: Rentenversicherung der Arbeiter

AnV: Rentenversicherung der Angestellten

L e b e n s l a u f

Am 21. Juli 1935 wurde ich als Sohn des Diplom-Ingenieurs Friedrich I s e n b a r t und seiner Ehefrau Anneliese, geb. Hocker, in Berlin-Charlottenburg geboren. Nach sechsjähriger Grundschulzeit und siebenjährigem Besuch der Herder-Schule (Reform-Real-Gymnasium) in Berlin-Charlottenburg legte ich im Frühjahr 1955 an dieser Schule die Reifeprüfung ab. Eine anschließende dreijährige kaufmännische Lehre bei den Siemens-Schuckert-Werken AG verbrachte ich in Berlin, Hannover und Erlangen. Nach dem erfolgreichen Abschluß dieser Lehre mit einer Prüfung vor der Industrie- und Handelskammer in Berlin begann ich im Sommersemester 1958 mit dem Studium der Wirtschaftswissenschaften an der Freien Universität Berlin, das ich im Wintersemester 1963/64 mit der Diplomprüfung für Betriebswirte abschloß. Meine hauptsächlichen akademischen Lehrer sind die Professoren H.Arndt, E.Hirsch, E.Kosiol, H.Münzner, R.Schilcher und G.Wünsche.

Die Dissertation entstand unter der Leitung von Herrn Professor Münzner, an dessen Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik ich seit 1962 als Hilfskraft beschäftigt war und seit 1964 als wissenschaftlicher Assistent tätig bin.

Druck: PHOTO COPIE W.Hilke KG, 1 Berlin 30, Motzstraße 64